第一部分　质点和刚体

第一章　质点和刚体的运动学

运动学（主要是质点和刚体的运动）是理论力学中的一个重要部分，它不仅是动力学的基础，而且运动学本身在工程实际中也有着许多应用。例如，在设计传动机构时首先要作运动分析，特别在仪表设计中，由于零件受力较小，动力分析往往可不加考虑，运动分析就成为设计时的主要内容。

运动学是以研究质点和刚体这两个简化模型的运动为基础的。它通过位移、速度、加速度及角速度等物理量来描述和研究物体位置随时间的变化规律，而并不考虑导致物体位置和运动状态改变的原因，即不考虑作用在物体上的力。因为运动学中不涉及物体的质量，所以不妨把质点抽象成一个不计质量、没有大小的几何点，因此，常把质点运动学抽象为点的运动学。

本书的前六章是研究质点和刚体，只有掌握了这两类运动的规律，才能进一步研究变形体（弹性体等）的运动，这时要分别研究微元的刚体位移和变形位移。

为了描述运动，我们首先要搞清楚参考体、参考系和坐标系三个概念，它们之间既有联系，又有区别。

我们知道，物体的运动都是相对的。为了要描述某个物体的位置和运动，就要选取另外一个物体作为参考，这个作为参考的物体就称之为**参考体**。在理论力学中，常选取某个三维的、不变形的物体作为参考体。

为了讨论方便，我们还要把参考体抽象为参考系，即在参考体上安置一个固连的三维标架，用它代表这个参考体，这个标架就称之为**参考**

系。参考体总是一个大小有限的真实物体，而参考系则应理解为与参考体相固连的三维空间，它是无限的。例如，当我们选取地球为参考体时，可在地面上固连一个标架，其三个方向分别沿着当地的经线方向、纬线方向和指向天顶的方向，这样的标架称之为**地球参考系**，我们可在此参考系中讨论某个人造卫星的运动，虽然该卫星离地面有几万公里，但它仍在地球参考系的空间中运动。当然，在地球上各点，包括地心都可安置一个固连的标架，它们本质上是一样的，都代表地球，可认为是同一参考系。所以一个参考体对应于一个参考系。

有时候，参考系是更为抽象的，可能只有参考系而没有真实的参考体。例如，设想一个标架，该标架以地球中心为原点，三个方向分别指向三颗恒星，它的原点与地心一起运动，标架的三根轴在太阳系的指向不变，这也是一个参考系，称之为**地心参考系**。它与前述的地球参考系是不同的，地心参考系并没有固连在某个真实参考体上，而且在地心参考系中可观察到地球的自转。今后，我们不作特别声明时，总选取地球参考系。

在选定参考系后，对某一物体的运动的描述才有确定的意义。为了对物体的运动作数学描述，就要在参考系中建立**坐标系**，它可根据题目的要求和解题的方便自由选定。同一个参考系中可建立许多个不同的坐标系（原点可以不同，坐标轴的方向也可不同），而且坐标系还有各种不同的形式（例如直角坐标系、平面极坐标系等等）。例如，当讨论人造地球卫星的运动时，在地心参考系的轨道平面中，建立以地心为极点的平面极坐标系是最方便的。

由于固连在参考系中的空间直角坐标系就是一个标架，因此常用直角坐标系代表参考系，它具有参考系和坐标系的双重意义。

§1.1 质点运动学

本节讨论点在某一选定的参考系中作任意运动时，该点的速度、加速度和轨迹的表达式，我们将用矢量法、坐标法和自然法分别加以描述。

1. 矢量法

矢量法的优点是表达简洁，而且对各种坐标系都适用，在理论推导和求证时常用此法。

假设我们已经选定了某个参考系，而O是其中一个固定点，则任一点M在参考系中的位置就可用$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$来表示(图 1-1)，$\boldsymbol{r}$ 称为 M 点的位置矢量，或称为**矢径**。

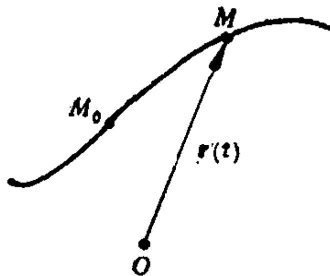


图 1-1

如果任一瞬时 t，M 点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 都是已知的，则 $\boldsymbol{r}$ 是时间 t 的矢量函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1.1}$$

(1.1)式就称为 M 点的**运动规律**。根据点的运动性质，可知 $\boldsymbol{r}(t)$是时间 t 的单值、连续函数，当 M 点运动时就在参考系中描出一条连续曲线，这条曲线称为 M 点的**轨迹**或**轨道**。而(1.1)式就是轨迹的参数方程(以 t 为参数)。根据轨迹的不同，可将点的运动分为空间曲线运动、平面曲线运动和直线运动等。

设 $\boldsymbol{r}(t)$关于 t 是二次可导的，根据矢量导数的定义，我们把 $\boldsymbol{r}(t)$的一阶导数$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$称为 M 点在时刻 t 的瞬时速度矢量，简称**速度**，记作$\boldsymbol{v}(t)$，我们用在字母 $\boldsymbol{r}$ 上加一点并用它来表示对时间的导数，则速度 $\boldsymbol{v}$ 与矢径 $\boldsymbol{r}$ 的关系是

$$\boldsymbol{v}(t)=\dot{\boldsymbol{r}}(t) \tag{1.2}$$

显然，速度 $\boldsymbol{v}$ 沿着轨迹的切线方向。

再把速度矢量对时间求导一次，即$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$，称为 M 点在时刻 t 的瞬时加速度矢量，简称**加速度**，记作 $\boldsymbol{a}(t)$，则有

$$\boldsymbol{a}(t)=\dot{\boldsymbol{v}}(t)=\ddot{\boldsymbol{r}}(t) \tag{1.3}$$

例 1.1 单位矢量的导数。设 $\boldsymbol{A}^0(t)$ 是平面上的一个单位矢量，即 $|\boldsymbol{A}^0(t)|=1$，又设在时刻 t，$\boldsymbol{A}^0$ 与平面上固定直线 Ox 的夹角为 $\varphi(t)$(图 1-2 a)，试求导数$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^0}{\mathrm{d}t}$的表达式。

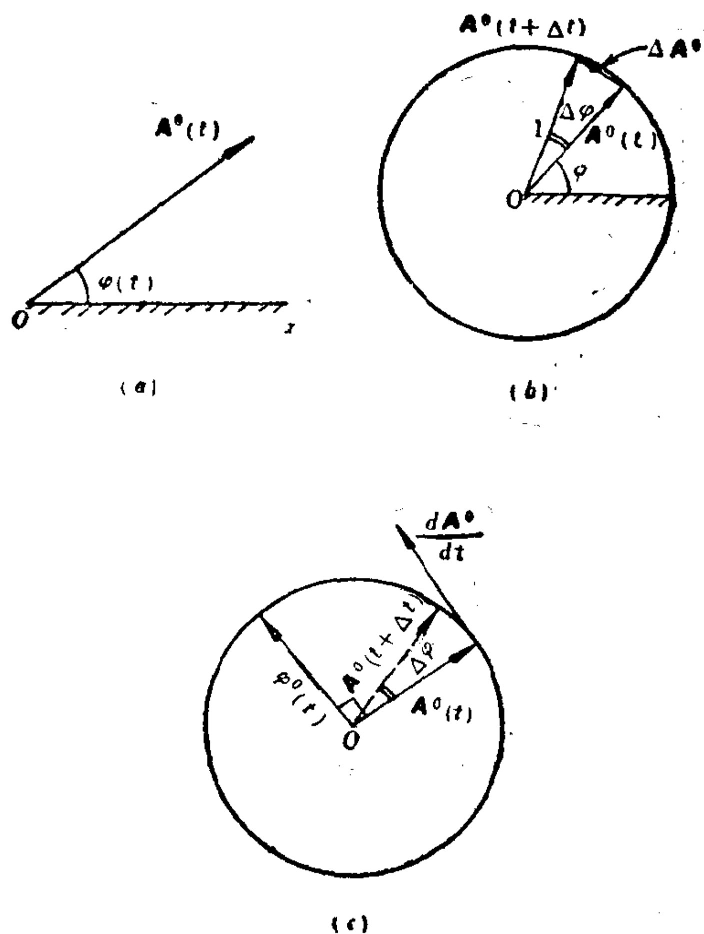


图 1-2

【解】 本例说明矢量导数的求法。

我们分别求矢量$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^0}{\mathrm{d}t}$的方向和大小。

先求方向。因 $|\boldsymbol{A}^0(t)|=1$，即 $(\boldsymbol{A}^0)^2=1$，两边对 t 求导数得

$$\boldsymbol{A}^0\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^0}{\mathrm{d}t}=0$$

即矢量$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^0}{\mathrm{d}t}$的方向与单位矢量 $\boldsymbol{A}^0$ 本身垂直。这是一个经常用到的性质，它对于空间的单位矢量同样成立。

再求$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^0}{\mathrm{d}t}$的大小$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^0}{\mathrm{d}t}\right|$。设经 Δt 后，单位矢量 $\boldsymbol{A}^0(t+\Delta t)$转过

角度 $\Delta\varphi$，根据矢量导数的定义和图 1-2b，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^0}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}^0(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}^0(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{A}^0}{\Delta t}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^0}{\mathrm{d}t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{A}^0|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right|}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|$$

$$=|\dot{\varphi}|$$

现设 $\boldsymbol{\varphi}^0(t)$ 为垂直于 $\boldsymbol{A}^0(t)$ 的单位矢量，且沿着 φ 增大的方向为正（图 1-2c），则单位矢量的导数公式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^0}{\mathrm{d}t}=\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0$$

2. 坐标法

对实际的力学问题，常要求出物体速度、加速度的具体大小和方向，以及轨迹方程等，这时可选用合适的坐标系，将速度或加速度在该坐标系中投影，写出各分量的表达式后再进行运算，这就称为**坐标法**。

必须指出的是，由于矢量法和坐标法都要作微分运算，所以必须列出任意时刻（非特殊位置）的位置或速度的表达式，才能求导。

常用的坐标系有直角坐标系、平面极坐标系、圆柱坐标系和球面坐标系等，下面将分别讨论之。

（1）直角坐标系。这是大家熟悉的，设 $Oxyz$ 为笛卡尔右手系，沿坐标轴的单位矢量分别为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$。点 M 的坐标为 (x, y, z)，则矢径 $\boldsymbol{r}(\overrightarrow{OM})$ 为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1.4}$$

要求得速度和加速度在直角坐标系中的各分量，则只要根据定义 (1.2) 和 (1.3) 式，将 (1.4) 式对时间求导数即可，

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k} \tag{1.5}$$

$$a=\dot{v}=\ddot{x}i+\ddot{y}j+\ddot{z}k \tag{1.6}$$

而 v 和 a 在直角坐标系中的分量表达式为

$$v_x=\dot{x},\ v_y=\dot{y},\ v_z=\dot{z} \tag{1.7}$$

$$a_x=\ddot{x},\ a_y=\ddot{y},\ a_z=\ddot{z} \tag{1.8}$$

读者可由此自行求出 v 和 a 的大小及方向(由方向余弦给出) 的表达式。

例 1.2 半径为 R 的轮子沿直线轨道无滑动地滚动(称为纯滚动)，已知轮子转角 φ(轮子上半径与空间固定的一直线间的夹角，如图 1-3 所示)的运动规律为 $\varphi=\varphi(t)$，试求轮子边缘上一点 M 的轨迹、速度和加速度。

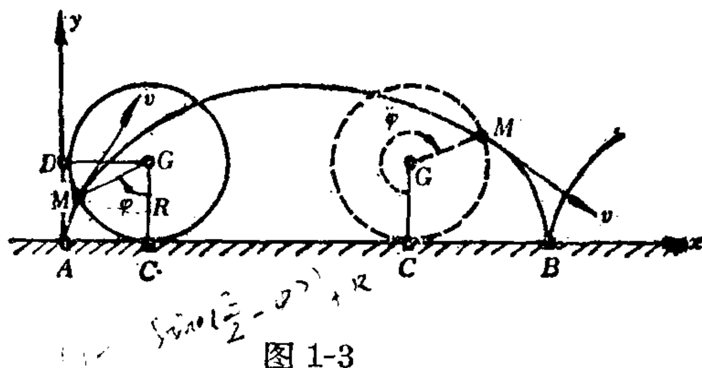


图 1-3

【解】 取轮缘上的 M 点为动点(研究对象)。在轮子滚动的平面上建立直角坐标系 Axy，原点 A 是轮子滚动中 M 点的某个最低位置，Ax 轴沿滚轮的直线轨道，在任意时刻 t，轮子位置如图 1-3 所示，G 为轮心，C 是轮缘与轨道的接触点，$\angle CGM=\varphi(t)$。

由于轮子只有滚动而没有滑动，所以 $AC=\widehat{CM}=R\varphi$。这样可得 M 点的坐标为：

$$\begin{cases} x=\overline{AC}-\overline{GM}\sin\varphi=R(\varphi-\sin\varphi) \\ y=\overline{GC}-\overline{GM}\cos\varphi=R(1-\cos\varphi) \end{cases} \tag{1}$$

因为 $\varphi(t)$ 是已知的，所以(1)式就是 M 点的运动规律，也是 M 点轨迹的参数方程。容易看出，这是一条旋轮线，滚轮是它的母圆。

由(1)式即可求出 M 点速度的直角坐标分量为

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = R\dot{\varphi}(1-\cos\varphi) \\ v_y = \dot{y} = R\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases} \tag{2}$$

速度的大小为

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \\ &= |\dot{\varphi}|\left(2R\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\right) = |\dot{\varphi}|\overline{MC} \end{aligned}$$

它的方向沿轨迹的切线。由此可以证明旋轮线的一个重要性质如下：由图 1-3 可知

$$\overrightarrow{CM} = -R\sin\varphi\boldsymbol{i} + R(1-\cos\varphi)\boldsymbol{j}$$

由(2)式，$\boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{CM}=0$，所以旋轮线上任一点 M 的切线方向与连线 MC 相垂直（C是母圆上与轨道的接触点），或者说，旋轮线上M点的主法线方向是沿着$\overline{MC}$的，由此可方便地画出旋轮线上任一点的速度方向。又当 M 点在最低位置 A 点，B 点($y=0$)，即 $\varphi=0,2\pi$ 时，由(2)式可知，$\dot{x}=\dot{y}=0$，所以轮子作纯滚动时，轮缘接触点的瞬时速度为零。

由(2)还可求得加速度 $\boldsymbol{a}$ 的分量为

$$\begin{cases} a_x = R\ddot{\varphi}(1-\cos\varphi) + R\dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ a_y = R\ddot{\varphi}\sin\varphi + R\dot{\varphi}^2\cos\varphi \end{cases} \tag{3}$$

值得指出的是，当 M 点在最低位置，即 $\varphi=0,2\pi$ 时，$a_x=0$，$a_y=R\dot{\varphi}^2$，所以在滚轮与轨道的接触点 C处，加速度的方向指向轮心 G，而其大小却与 $\ddot{\varphi}$ 无关。

（2）平面极坐标系。当已知点作平面曲线运动时，有时（例如人造地球卫星的运动）采用极坐标系比用直角坐标系更方便。现在就来导出极坐标下速度和加速度的表示式。

在平面极坐标系中，设点 M 的位置由极坐标(r,φ)给出，点 M 的运动将由运动规律 $r=r(t)$ 和 $\varphi=\varphi(t)$ 来描述。今沿矢径 $\overrightarrow{OM}$方向取径向单位矢量 $\boldsymbol{r}^0$（图 1-4）；再取另一个横向单位矢量 $\boldsymbol{\varphi}^0$，它由 $\boldsymbol{r}^0$ 沿着 φ 角增加的方向转过$\frac{\pi}{2}$而得到，所以 $\boldsymbol{\varphi}^0$ 与 $\boldsymbol{r}^0$ 互相垂直。与直角坐标

系的情况不同，现在单位矢量 $\boldsymbol{r}^0$、$\boldsymbol{\varphi}^0$ 的方向要随着 M 点的运动而改变，即它们都是时间 t 的函数。

根据矢径 $\boldsymbol{r}$ 的定义和单位矢量导数公式可得下列表达式

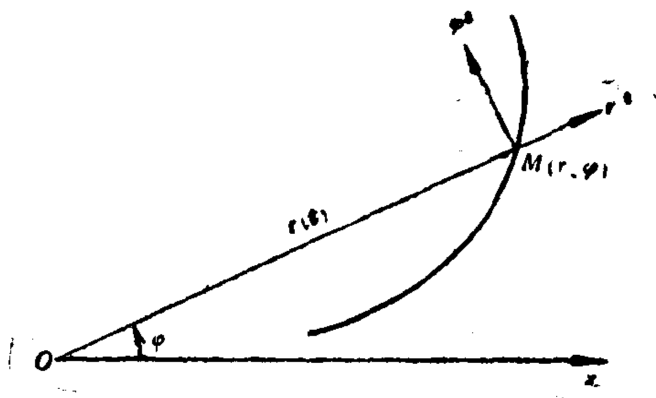


图 1-4

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{r}^0 \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{r}^0 + r\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0 \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{r}^0 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\boldsymbol{\varphi}^0 \tag{1.11}$$

则 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的径向分量、横向分量分别由下式表出：

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} \tag{1.12}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \ a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi}) \tag{1.13}$$

必须注意，这里的径向和横向，在一般情况下是不同于轨迹的法向和切向的。

最后，在平面极坐标系中，点的轨迹方程可由运动规律消去 t 而得到，即

$$r = r(\varphi) \tag{1.14}$$

例 1.3 图 1-5 所示为凸轮-挺杆机构。今凸轮绕 O 轴以匀角速 ω 转动，为使挺杆 AB 能以匀速 u 上升，试求凸轮上 CD 段轮廓线的曲线方程。

【解】 以凸轮为参考体，并在其上建立平面极坐极系，极轴 Ox 通

过凸轮上的 C 点，如图 1-5 所示。

现讨论挺杆端点 A 的运动。从凸轮上看，杆上的 A 点始终沿其轮廓线上运动，所以应求 A 点的轨迹。

设 A 点沿 CD 段运动时的坐标为（r，φ），又设凸轮基圆的半径为 R，且设当 $t=0$ 时 C 点与 A 点相重合，则由图可得 A 点的运动规律为

$$\begin{cases} r = \overline{OA} = R + ut \\ \varphi = \omega t \end{cases}$$

消去时间 t，即得 A 点在凸轮上的轨迹方程

$$r = R + \frac{u}{\omega}\varphi$$

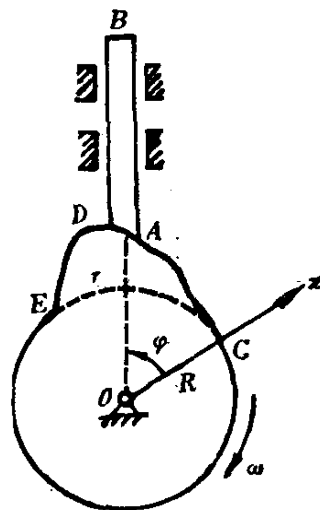


图 1-5

显然，CD 段曲线应是阿基米德螺线。

（3）柱面坐标系。当动点作空间曲线运动时，有时可采用柱面坐标系。设动点 M 在柱面坐标系中的位置由(r,φ,z)来表示(图 1-6)，即由 M' 点（M 点在 xy 平面上的投影）的平面极坐标(r，φ)和M点的直角坐标 z 合并而成，设其单位矢量分别为 $\boldsymbol{r}^0$、$\boldsymbol{\varphi}^0$、$\boldsymbol{k}$，则在柱面坐标系中，点的运动规律是

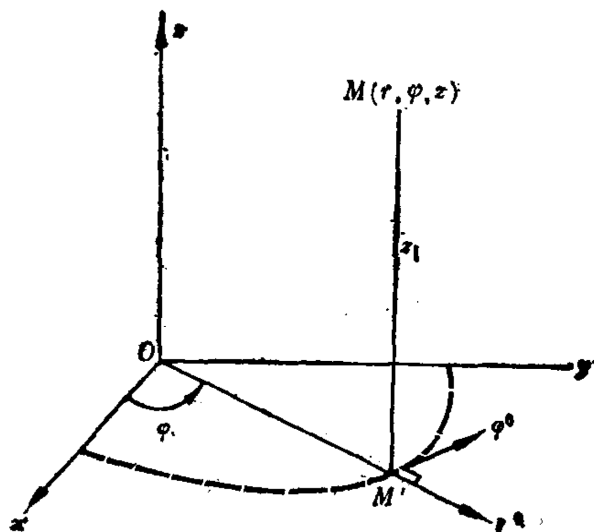


图 1-6

$$r=r(t),\ \varphi=\varphi(t),\ z=z(t)$$

矢径为

$$\boldsymbol{\rho}=r\boldsymbol{r}^0+z\boldsymbol{k}$$

根据单位矢量导数的公式，可得 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 在柱面坐标系中的表达式为

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}\boldsymbol{r}^0+r\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0+\dot{z}\boldsymbol{k} \tag{1.15}$$

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{r}^0+(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})\boldsymbol{\varphi}^0+\ddot{z}\boldsymbol{k} \tag{1.16}$$

3. 自然法

当已知点的运动轨迹时，若用曲线弧长 s 作为参数来描述点的速度与加速度往往是方便的，这就是**自然法**。

设已知动点 M 的轨迹是空间曲线 C，则以 s 为参数时，M 点的矢径可表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$$

运动规律是

$$s=s(t)$$

由速度的定义(1.2)式，可得

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

由于 $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|=1$，且 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ 就是轨迹在 M 点切线方向（MT）的单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$（图 1-7），并指向 s 的正向，所以速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向沿着该点轨迹的切线

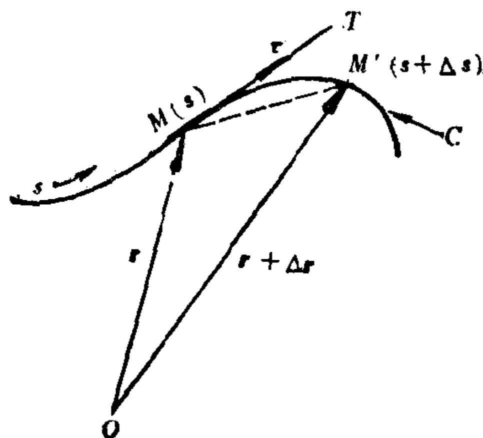


图 1-7

且其大小为 $|\dot{s}|$。即

$$\boldsymbol{v}=\dot{s}\boldsymbol{\tau} \tag{1.17}$$

由(1.3)式，可得加速度为

$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{s}\boldsymbol{\tau}+\dot{s}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=\ddot{s}\boldsymbol{\tau}+\dot{s}^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} \tag{1.18}$$

现在要计算$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}$，因为它是单位矢量$\boldsymbol{\tau}$(空间矢量)对$s$的导数，所以$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}$的方向是与$\boldsymbol{\tau}$相垂直的，即位于$M$点的法平面内。再求$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}$的大小，如图1-8，设$M'$是曲线$C$上与$M$点相邻近的点，其切向单位矢量为$\boldsymbol{\tau}'=\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s)$，在$M$点作$\overrightarrow{MS}\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}\boldsymbol{\tau}'$，则得以$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\tau}'$为腰的等腰三角形$MTS$，设$\angle TMS=\Delta\theta$，则

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\boldsymbol{TS}}{\Delta s}\right|$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{1}{\Delta s}\cdot 2\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right|$$

$$=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\left|\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right|}{\left|\frac{\Delta\theta}{2}\right|}\cdot\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$$

$$=\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right|$$

因为$\mathrm{d}\theta$是两无限邻近的切线间的夹角，所以$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}s$就是$M$点的曲率，而它的倒数$\rho=\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right|$称为曲率半径，具有长度的量纲。

当$\Delta s\to 0$时，我们把$\triangle MTS$所在平面的极限位置称为**密切平面**，则$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}$就在这个平面内，我们把密切平面与法平面的交线称为$M$点的**主法线**，其单位矢量记作$\boldsymbol{n}$(指向曲线的凹方为正)，则由上面的讨论可知

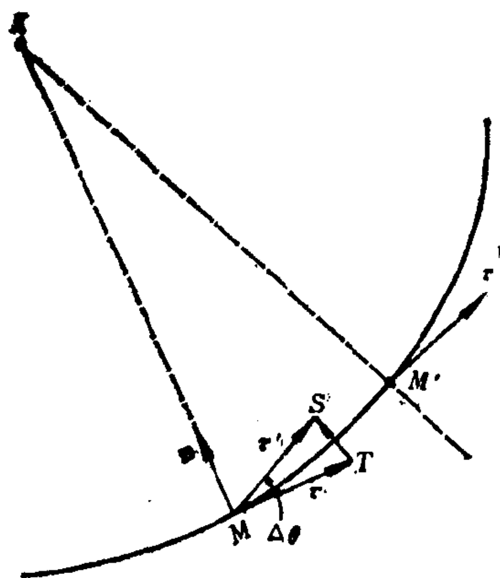


图 1-8

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{n} \tag{1.19}$$

再定义一个单位矢量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}$,称为 M 点的副法线单位矢量。这样,在轨迹的每个点上都可作三个相互垂直的单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{b}$,则就构成了该点的**自然坐标系**。

现在回到点的加速度表示式。将(1.19)式代入(1.18)式,得

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{n} \tag{1.20}$$

即

$$a_\tau = \ddot{s} = \dot{v}, \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0 \tag{1.21}$$

上式表示:加速度矢量位于密切平面内。切向加速度 a_τ 是由于速度大小的改变而引起的,而法向加速度 a_n 则是由于速度方向的改变(曲线弯曲引起切线方向改变)而引起的。全加速度的大小为

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}$$

自然法的特点是在轨迹曲线 C 的每一点都可建立一个坐标系 $\boldsymbol{\tau n b}$，且它只依赖于该点附近曲线本身的性质（依赖于弧长 s）。自然系下的速度和加速度表达式(1.17)和(1.21)的物理意义是十分明显的。

用自然法解题，常要计算曲率半径 ρ，在直角坐标系下，设曲线为 $y=f(x)$，则

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}$$

在极坐标系下，设曲线为 $r=r(\varphi)$，令 $r'=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$，$r''=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\varphi^2}$，则

$$\rho=\frac{(r^2+r'^2)^{3/2}}{|r^2+2r'^2-rr''|}$$

例 1.4 图 1-9 所示为点沿圆柱螺旋线的运动。设已知点 M 的运动规律为 $x=R\cos\omega t$；$y=R\sin\omega t$；$z=\frac{h}{2\pi}\omega t$，其中 R、ω、h 均为常数。试求点的运动轨迹及其曲率半径，并求动点速度和加速度的大小。

【解】 本题已知动点在直角坐标系中的运动规律，因此，可用直角坐标法解题，但又已知轨迹（圆柱螺旋线，如图 1-9 所示）的参数方程，所以也可以用自然法解题。现把这两种方法结合起来求解。

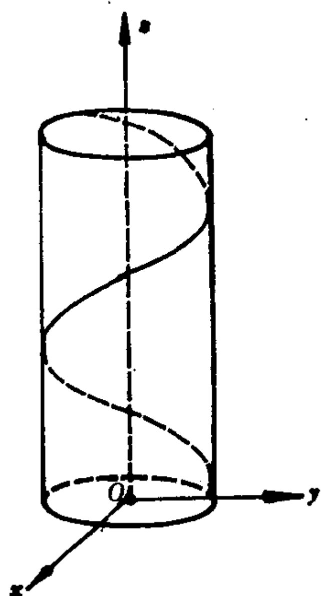


图 1-9

先由直角坐标法得

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$
$$=\omega\sqrt{R^2+(h/2\pi)^2} \qquad (1)$$

$$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}=R\omega^2 \qquad (2)$$

又由自然法公式得

$$a_\tau=\dot{v}=0 \qquad (3)$$

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=R\omega^2$$

又 $$a_n = v^2/\rho$$

所以 $$\rho = v^2/(R\omega^2) = R + \frac{h^2}{4\pi^2 R} > R \tag{4}$$

即圆柱螺旋线的曲率半径大于其所在圆柱的半径。

上面举例说明了点的速度和加速度公式的应用。通常在解点的运动学问题时，首先要确定研究对象(现在是某个动点)，认定参考系(当不作说明时，即认为是地球参考系)，选用合适的坐标系，然后根据运动学公式进行运算，现再举一例。

例1.5 图 1-10 a 所示为曲柄连杆机构，它是工程上常用的机构。设曲柄 $\overline{OA} = R$，连杆 $\overline{AB} = l$，连杆上 M 点与 A 点的距离为 b，已知曲柄以等角速 ω 绕 O 轴转动。试求 M 点的运动轨迹及其在直角坐标系中的速度分量。

【解】 由于M为动点，根据机构的结构情况取直角坐标系 Oxy 如图 1-10 b 所示。先求 M 点的轨迹，注意到 $R\sin\omega t = l\sin\beta$，即得 M 点的坐标为

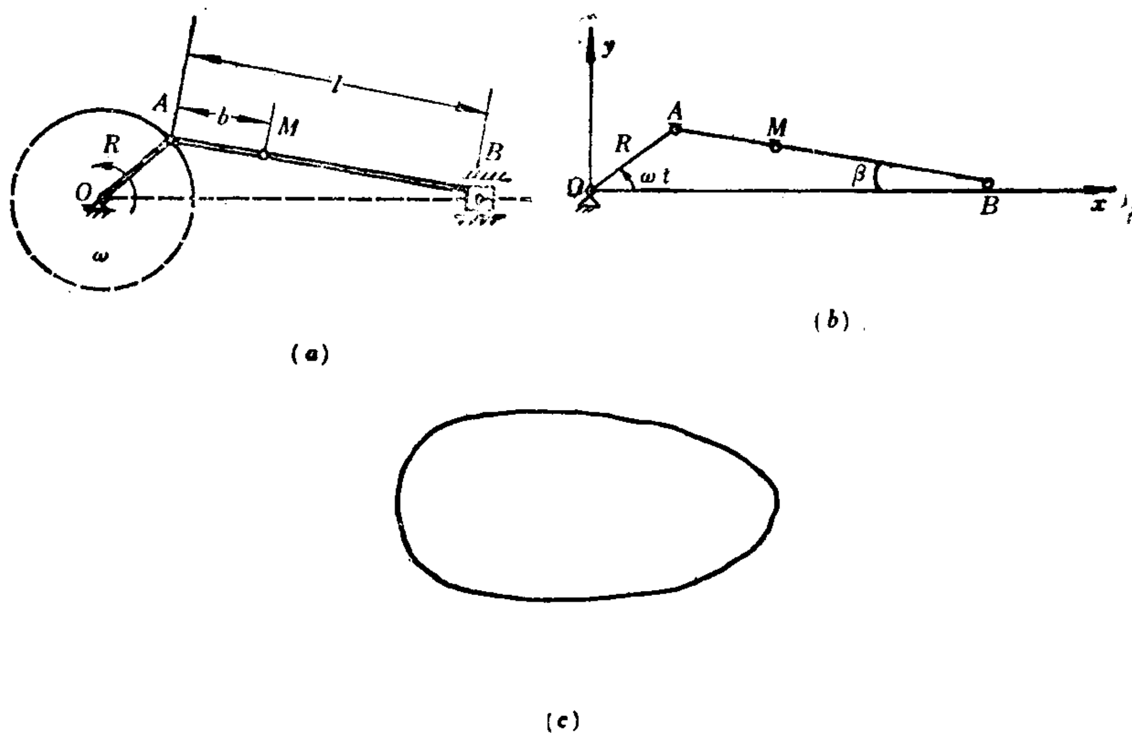


图 1-10

$$x = R\cos\omega t + b\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2}\sin^2\omega t} \tag{1}$$

$$y = (l - b)\sin\beta = R\left(1 - \frac{b}{l}\right)\sin\omega t \tag{2}$$

这就是 M 点轨迹的参数方程，消去参数 t，可得一条四次曲线，由(1)、(2)可知，这是一条闭曲线，称为卵形线。对于特殊点 A（即 $b=0$），其轨迹是半径为 R 的圆周，而对于 B 点，即 $b=l$，轨迹为直线 Ox 轴。特别，当 $b=\frac{l}{2}$，即M为连杆 AB 的中点时，可算得 M 点的轨迹方程为

$$4x^2\left(\frac{l^2}{4} - y^2\right) = \left(x^2 + 3y^2 + \frac{l^2}{4} - R^2\right)^2$$

若取 $R=1, l=2, b=1$，则轨迹形状如图 c 所示。

为了求 M 点的速度分量，可将(1)式和(2)式分别对时间求导，即

$$v_x = \dot{x} = -R\omega\sin\omega t - \frac{b\omega}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{l^2}\sin^2\omega t}} \cdot \frac{R^2}{2l^2}\sin 2\omega t \tag{3}$$

$$v_y = \dot{y} = R\omega\left(1 - \frac{b}{l}\right)\cos\omega t \tag{4}$$

§1.2 刚体的基本运动和平面平行运动

刚体和质点一样，是力学中的一种简化模型。当物体内各质点之间的距离始终保持不变时，就可称这个物体为**刚体**，本节和以下两节就是讨论刚体的运动。刚体的运动形式可以分为五类：平动、定轴转动、平面平行运动、定点转动和一般运动。前两类运动称为刚体的基本运动，后三类运动可看成由前两类运动复合而成的。刚体的任何运动均属此五类之一。掌握这五类运动的特征，区分刚体的运动类型，这对于学好运动学和动力学都有很大的帮助。

刚体运动学的基本任务就是要求出刚体上各点的速度、加速度、轨迹等运动学量。由于刚体是由无穷多个质点组成的，一般说来，各质点的运动规律是不同的，因此除了刚体作平动外，所谓“刚体的速度、刚体的加速度”是没有意义的，但由于刚体内各质点的相对位置始终保持不变，因此各质点的速度、加速度之间也存在着一定的关系，我们要注意掌握这些关系。下面就分别讨论这五类运动。

1. 平动

如果刚体在运动过程中，它上面的任意一条直线都保持与其原来位置相平行，这种运动就称为刚体的平行移动，简称**平动**或**平移**。此时刚体上所有各点都有相同的速度和加速度，而且各点的轨迹形状都相同。所以刚体上任何一个质点的运动都可代表整个刚体的运动，刚体平动就可归结为质点的运动，这就是上节讨论的内容。

2. 定轴转动。

如果刚体运动时，其上有两点始终不动，这种运动就称为刚体的**定轴转动**或简称为**转动**。这时，两不动点的连线就是该刚体的**固定转轴**，整个刚体绕此固定轴线转动。要注意的是固定轴可以在刚体内部（如飞轮的转动，地球的自转等），也可以在刚体的外部，这时就要设想刚体是可以扩大的，而固定轴就在扩大的刚体上。例如列车沿着圆弧轨道转弯时，车厢的转动轴就不在车厢上。

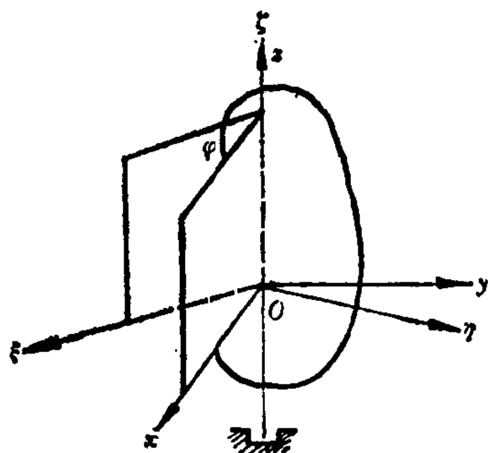


图 1-11

定轴转动刚体的位置可由转角 φ 确定。设 $O\xi\eta\zeta$ 为固定在所选参考系中的坐标系（以后简称为**固定系**），并取 $O\zeta$ 轴与刚体的固定轴相重合(图 1-11)；再取一个固连于刚体的坐标系 $Oxyz$(以后简称为**固连系**)，并使 Oz 轴与 $O\zeta$ 轴相重合(正向也一致)，则刚体运动时固连系的 Oxz 平面与固定平面 $O\xi\zeta$ 间的夹角 φ称为刚体的**转角**，并可以 ζ 轴的正向为准、按右手法则决定 φ 角的正向。当 $\varphi(t)$ 已知

时，就称

$$\varphi=\varphi(t)$$

为刚体定轴转动的运动规律或**转动方程**。由于只要用一个变量（φ 角）就可决定它的位置，因而称此刚体具有一个**自由度**。

转角 $\varphi(t)$ 对时间 t 的导数

$$\dot{\varphi}(t)=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

称为刚体的**瞬时角速度**，它描述了刚体转动的快慢和方向，$\dot{\varphi}>0$ 时朝 φ 角增大的方向转动，$\dot{\varphi}<0$ 则反之。

角速度的变化率，即角速度对时间的导数

$$\ddot{\varphi}(t)=\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}t}$$

称为刚体的**瞬时角加速度**。

角速度的量纲是[时间]$^{-1}$，常用单位是 1/s、转/分等；角加速度的量纲是[时间]$^{-2}$，常用单位是 $1/s^2$ 、r/min^2 等。

定轴转动刚体的角速度 $\dot{\varphi}$ 和角加速度 $\ddot{\varphi}$ 描述了每一瞬时刚体整体的运动状态，由此就不难求出刚体上各点的速度和加速度公式了。

刚体作定轴转动时，其上任一点 M 都作圆周运动，圆心就在转动轴上，圆周的所在平面与轴线垂直，半径是 M 点到转轴的垂直距离 R（图 1-12），圆周运动的角速度和角加速度就是刚体的 $\dot{\varphi}(t)$ 和 $\ddot{\varphi}(t)$，所以容易由自然法求得 M 点的速度和加速度为：

$$v=R\dot{\varphi}，\quad a_\tau=R\ddot{\varphi}，\quad a_n=R\dot{\varphi}^2$$

现在把它们写成矢量的形式。设$\boldsymbol{k}$为

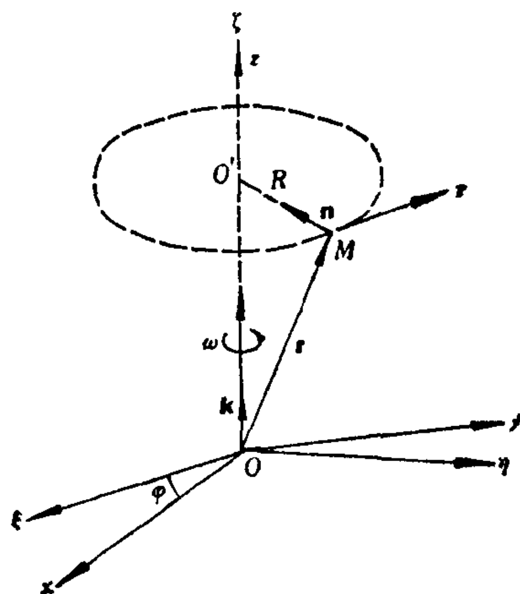


图 1-12

转轴oz的单位矢量，由于它是常矢量，则可引进**角速度矢量** $\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{k}$ 和**角加速度矢量** $\boldsymbol{\varepsilon}=\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\ddot{\varphi}\boldsymbol{k}$。再设 M 点的矢径为 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ (O 是转轴上某固定点)，则可得 M 点的速度和加速度的矢量表示式为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{1.22}$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} \tag{1.23}$$

显然，(1.23)式右端中第一项 $\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}$ 就是切向加速度，而第二项 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$ 是法向加速度。

例 1.6 轮系的传动比。在工程中，常利用轮系传动来提高或降低机械的转速，最常见的是齿轮系和皮带轮系。例如，为了要将电动机的转动传到机床的主轴，要用变速箱来降低转速，而变速箱往往由齿轮系组成；而在机床中，常用电动机通过皮带使变速箱的轴转动。

一对啮合的圆柱齿轮如图 1-13 a 所示，两个齿轮各绕固定轴 O_1 和 O_2 转动，已知其啮合圆半径各为 R_1 和 R_2；齿数各为 Z_1 和 Z_2；角速度各为 ω_1 和 ω_2。设 A 为两个齿轮啮合圆的接触点，因无相对滑动，即可求得

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{Z_2}{Z_1}$$

故齿轮的角速度与齿数成反比。

设轮 I 是主动轮，轮 II 是从动轮，在工程中常把主动轮和从动轮的两个角速度之比值称为**传动比**，记作 $i_{1,2}$，即

$$i_{1,2}=\pm\frac{\omega_1}{\omega_2}$$

式中正号表示两轮的转向相同，负号表示两轮的转向相反。

同理还可算得图 1-13 b 所示的皮带轮的传动比公式为

$$i_{1,2}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_2}{r_1}$$

即两轮的角速度与其半径成反比，且转动方向相同。

例 1.7 图 1-14 所示为连续印刷过程中的卷纸传送，传送中保持纸以匀速 V_0 水平输送。设纸厚为 b，初始时纸盘半径为 R，试求任意瞬

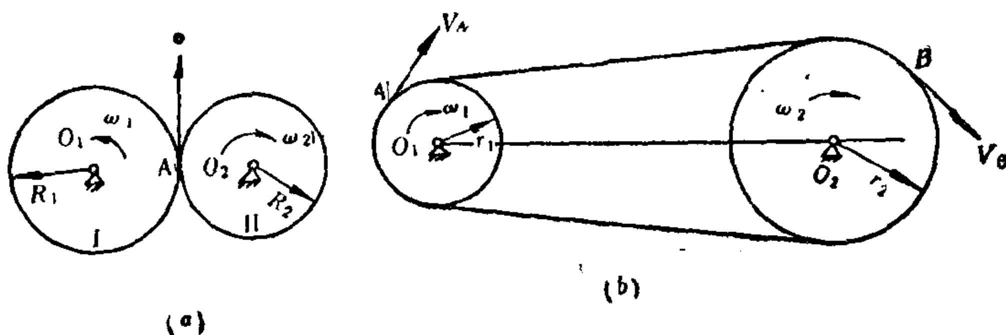


图 1-13

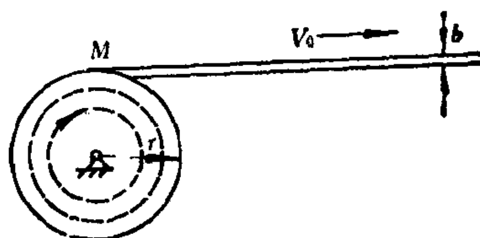


图 1-14

时 t，纸盘半径 $r(t)$ 及纸盘角加速度 $\varepsilon(t)$的表达式。

【解】 设任意时刻 t，纸盘角速度为 $\omega(t)$，则

$$v_0=\omega(t)\cdot r(t)$$

又因为纸盘每转一圈，半径就减少一张纸的厚度。即每转一圈半径的变化率为

$$\dot{r}=\frac{\Delta r}{\Delta t}=\frac{-b}{(2\pi/\omega)}=-\frac{bv_0}{2\pi r}$$

积分后可得

$$r(t)=\sqrt{R^2-\frac{bv_0}{\pi}t}$$

则

$$\varepsilon=\dot{\omega}=-\frac{v_0}{r^2}\dot{r}=\frac{bv_0^2}{2\pi r^3}=\frac{bv_0^2}{2\pi}\left(R^2-\frac{bv_0}{\pi}t\right)^{-3/2}$$

3. 平面平行运动

刚体运动时，如果刚体中任意一点与某一固定平面始终保持相等的距离，则就称此刚体作平面平行运动，简称**平面运动**，由此定义可知，刚体内任意一条垂直于该固定平面的直线作平动，该直线上各点都有相同的轨迹、速度和加速度，因此刚体作平面运动时，只需研究刚体中一个和固定平面相平行的截面(薄片)的运动，于是空间问题就简化

成平面问题。

在工程和日常生活中常遇见作平面运动的物体，如曲柄连杆机构中的连杆，沿直线行驶中的车轮等。

怎样才能确定平截面 S(即刚体)的位置呢？我们建立两个坐标系，一个是固定系 $O\xi\eta$，另一个是刚体上的固连系 Axy（图 1-15），其中 A 是刚体上任选的一点，称为**基点**。这样，刚体的运动就相当于 Axy 系相对于 $O\xi\eta$ 系的平面运动，而为了确定 Axy 系的位置，只要给出 A 点在 $O\xi\eta$ 系中的坐标（ξ_A,η_A）以及 x 轴与 ξ 轴之间的夹角 φ 即可。在刚体运动过程中，这三个量都是 t 的函数：

$$\xi_A=\xi_A(t),\quad \eta_A=\eta_A(t),\quad \varphi=\varphi(t) \tag{1.24}$$

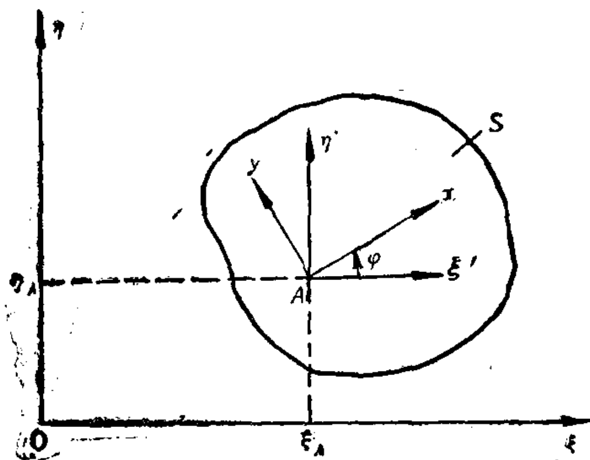


图 1-15

这就是刚体作平面运动时的运动规律。由于用三个独立的变量 ξ_A，η_A，φ 就可完全决定刚体的位置，因此作平面运动的自由刚体有三个自由度。

为了把平面运动分解成基本运动，我们再引进一个平动坐标系 $A\xi'\eta'$，它的原点就是固连坐标系的原点 A，它的两根坐标轴都分别与固定坐标系的轴相平行(图 1-15)，平动系与刚体是通过基点 A 相互联系的。

平动坐标系 $A\xi'\eta'$ 具有双重身分：一方面它可代表某个刚体的运动，根据定义，它相对于参考系 $O\xi\eta$ 是作平动，因此平动坐标系 $A\xi'\eta'$

中每一点的速度、加速度都是相同的，我们就用基点 A 的速度 $\boldsymbol{v}_A$ 和加速度 $\boldsymbol{a}_A$ 代表平动坐标系 $A\xi'\eta'$ 本身相对于 $O\xi\eta$ 坐标系的速度和加速度；另一方面，我们又可把 $A\xi'\eta'$ 系看成是一个参考系，它就是在本章开头时所讲到的那种有参考系而无参考体的情形。从这个参考系中来看，基点 A 是不动的，而刚体作定轴转动，转轴通过基点 A，并与运动平面相垂直。这样，由于我们引进了平动坐标系 $A\xi'\eta'$，就可把刚体的平面运动分解为两部分：刚体关于平动参考系 $A\xi'\eta'$ 作定轴转动，而 $A\xi'\eta'$ 又关于固定参考系 $O\xi\eta$ 作平动。

根据上述分解运动的思想可方便地导出刚体作平面运动时其上各点的速度和加速度的分布公式。

设固定系 $O\xi\eta$ 的单位矢量是 $\boldsymbol{\xi}^0$、$\boldsymbol{\eta}^0$，固连系 Axy 的单位矢量是 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$（图 1-16），M 是刚体上任意一点。则矢径

$$\boldsymbol{r}_M=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{r}_A+\overrightarrow{AM}$$

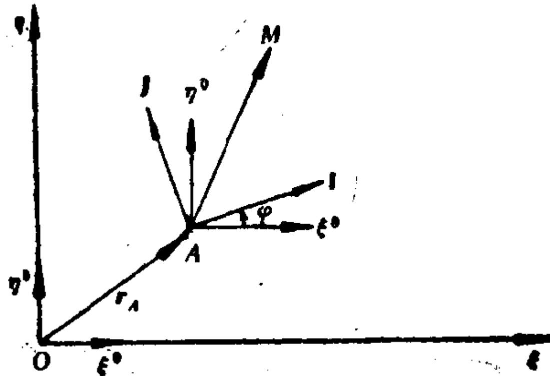


图 1-16

其中 $\overrightarrow{AM}$ 是 M 点在 Axy 系中的矢径，且 $|\overrightarrow{AM}|$ = 常量，记 $\overrightarrow{AM}$ 为 $\boldsymbol{r}'$，即

$$\boldsymbol{r}'=\overrightarrow{AM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{i}$$

则 M 点的速度为

$$\boldsymbol{v}_M=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_M}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} \tag{1.25}$$

根据前述的运动分解，上式右端第一项是基点 A 的速度 $\boldsymbol{V}_A=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t}$（它

也就是平动系 $A\xi'\eta'$ 中任一点的速度），而第二项由上节定轴转动的(1.22)式得 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'$，其中 $\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{k}$ 是刚体（在平动系 $A\xi'\eta'$）的角速度矢量，则(1.25)式为

$$\boldsymbol{v}_M=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AM} \tag{1.26}$$

这就是刚体作平面运动时的速度分布公式，它表示作平面运动的刚体上任一点的速度是基点的速度和该点在平动参考系中作圆周运动时速度的矢量和。(1.26)式又称为**基点法速度公式**。使用这个公式时要注意两点：一是 M 和 A 应是同一刚体上的两点；二是角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 是整个刚体运动状态的物理量，它与基点的选取和固连系坐标轴的取法无关。如图 1-17（y 与 y_1 轴未画出）所示，Axy 和 Bx_1y_1 是同一刚体上两个不同的固连系，显然

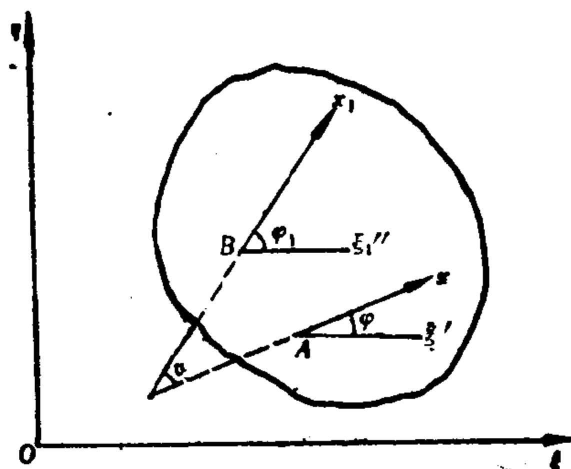


图 1-17

$$\varphi_1(t)=\varphi(t)+\alpha$$

但因刚体上两条直线间的夹角是不变的，即 $\alpha=$ 常数，取微商即得

$$\dot{\varphi}_1(t)=\dot{\varphi}(t)=\omega(t)$$

所以刚体平面运动的角速度是定轴转动角速度的推广。

例 1.8 求证：刚体作平面运动时，其上任意两点 A 和 B 的速度在该两点连线上的投影相等。

【证】 取 A 为基点，则 B 点的速度为

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times AB \tag{1}$$

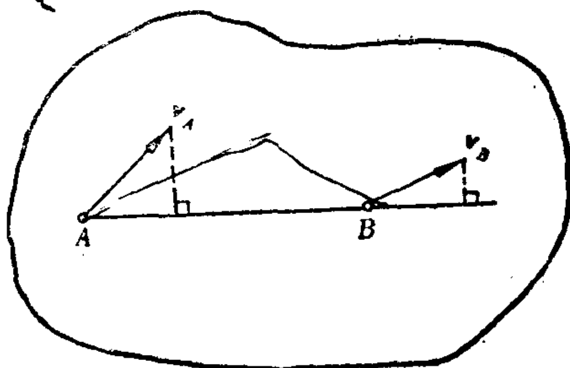


图 1-18

今在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上取一单位矢量，记作$(\overrightarrow{AB^0})$(如图 1-18 所示)，将(1)式在 $\overrightarrow{AB}$ 方向投影，得到

$$\boldsymbol{v}_B\cdot(\overrightarrow{AB})^0=\boldsymbol{v}_A\cdot(\overrightarrow{AB})^0$$ 证毕

这个性质常称作"**速度投影定理**"，它由刚体本身的性质所决定，当刚体作空间一般运动时仍然成立。

有了速度公式以后，就可求刚体上各点的加速度分布。将(1.26)式对 t 求导一次，得

$$\boldsymbol{a}_M=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_M}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_A}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AM})}{\mathrm{d}t}$$

式中右端第一项就是基点 A 的加速度 $\boldsymbol{a}_A$，即平动系 $A\xi'\eta'$ 的加速度，而第二项是转动加速度。将定轴转动中的公式(1.23)代入，于是得加速度的分布公式为

$$\boldsymbol{a}_M=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{\varepsilon}\times\overrightarrow{AM}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AM}) \tag{1.27}$$

由于刚体作平面运动时，$\boldsymbol{\omega}\perp\overrightarrow{AM}$，故上式又可写为

$$\boldsymbol{a}_M=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{\varepsilon}\times\overrightarrow{AM}-\omega^2\cdot\overrightarrow{AM} \tag{1.28}$$

这就是**基点法加速度公式**。

在使用基点法的速度公式和加速度公式时，常把刚体上已知其速

度或加速度的点选作基点；另外还要注意，现在的公式都是矢量式，在具体解题时往往要选取合适的方向进行投影。

例 1.9 梯子的滑动。梯子 AB 长 l，B 端靠在墙上。如将梯子下端 A 以等速度 u 向右水平地拖动（图1-19 a）。求当梯子与墙的夹角 φ 为 $\frac{\pi}{6}$ 时，B 点的速度 $\boldsymbol{v}_B$ 和加速度 $\boldsymbol{a}_B$ 以及梯子的角加速度 ε（用 l 及 u 表示）。

【解】 梯子 AB 作平面运动，建立固定系 $O\xi\eta$ 如图 1-19 a，又设 $\boldsymbol{k}$ 是垂直于 $O\xi\eta$ 平面的单位矢量（ξ^0、η^0、$\boldsymbol{k}$ 组成右手系）。由于 A 点的速度是已知的，因此可把它取作基点，由基点法速度公式可得

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \omega \boldsymbol{k} \times \overrightarrow{AB} \tag{1}$$

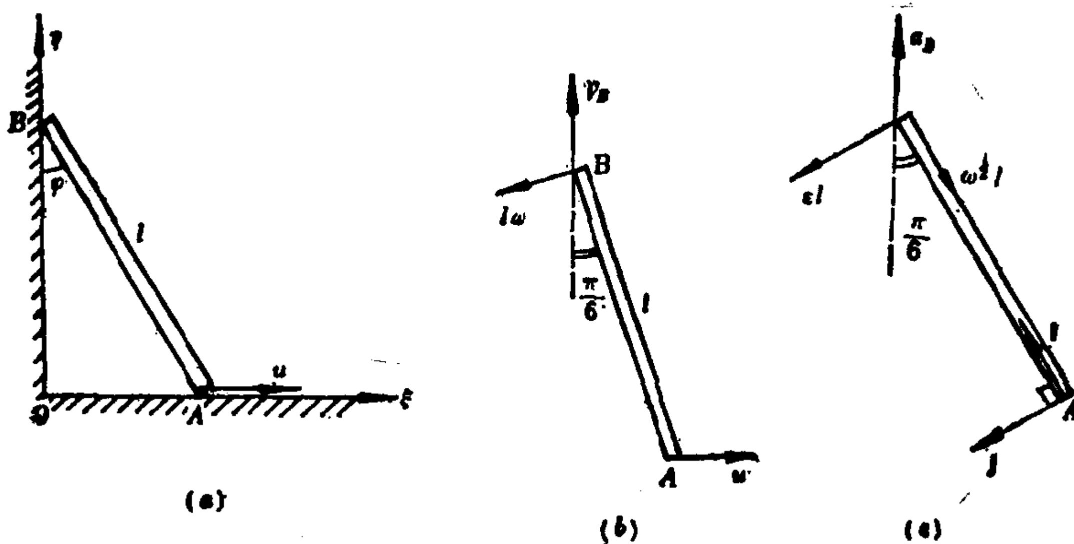


图 1-19

将上式分别在 ξ 和 η 轴上投影（图 1-19b），得

$$\begin{cases} 0 = u - \omega l \cos\dfrac{\pi}{6} \\ v_B = 0 - \omega l \sin\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

所以

$$v_B = -\frac{\sqrt{3}}{3} u \tag{2}$$

其中负号表示 B 点的速度沿 η 轴向下，通过计算还可求得

$$\omega=\frac{2u}{l\sqrt{3}} \tag{3}$$

$\boldsymbol{\omega}$ 的方向为逆时针方向。

再来求 $\boldsymbol{a}_B$。仍以 A 为基点，因 $\boldsymbol{a}_A=0$，故由(1.28)式有

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{\varepsilon}\times\overrightarrow{AB}-\omega^2\overrightarrow{AB}$$

如图 1-19c，取单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$，将上式沿这些方向投影，得

$$\begin{cases} a_B\cos\dfrac{\pi}{6}=-\omega^2 l \\ -a_B\sin\dfrac{\pi}{6}=\varepsilon l \end{cases}$$

这样，可解得

$$\begin{cases} a_B=-\dfrac{8u^2}{3\sqrt{3}\,l},\quad \text{方向沿 } \eta \text{ 轴向下} & (4) \\ \varepsilon=\dfrac{4u^2}{3\sqrt{3}\,l^2},\quad \text{逆时针方向} & (5) \end{cases}$$

请考虑一下，假使用坐标法求 B 点的速度和加速度与现在用基点法的公式有何不同。

4. 速度瞬心

当刚体作平面运动时，如果它的瞬时角速度 $\omega\neq0$，则刚体上一定存在一点 C，它的瞬时速度 $\boldsymbol{v}_C=0$。这样的点 C 就称为刚体的**速度瞬心**。证明如下：

设刚体 S 上某点 A 的速度为 $\boldsymbol{v}_A$，刚体角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，过 A 点将 $\boldsymbol{v}_A$ 顺着 $\boldsymbol{\omega}$ 的指向转动 $\frac{\pi}{2}$ 弧度得垂线 AC（图 1-20），并取 $\overline{AC}=\dfrac{v_A}{\omega}$，

则刚体上 C 点的速度是

$$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AC}$$

因为

$$\boldsymbol{v}_A=-\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AC}$$

所以 $\boldsymbol{v}_C=0$，即 C 为速度瞬心。当然 C 点亦可能落在刚体 S 的外面这时认为 C 点是在 S 的扩大体上。　　证毕

必须注意：瞬心不是固连在刚体上的，一般说来，不同瞬时，瞬心在刚体上具有不同的位置。

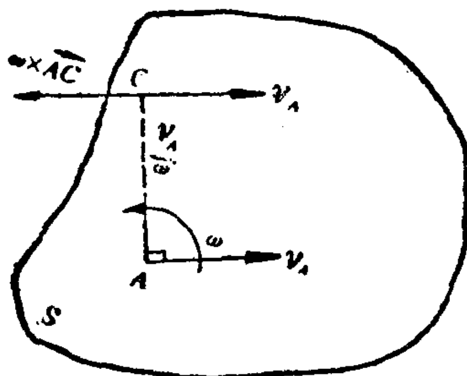


图 1-20

现在把速度瞬心 C 取作基点，则作平面运动的刚体上任一点 M 的速度公式为

$$\boldsymbol{v}_M=\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{CM} \tag{1.29}$$

这个公式与定轴转动刚体上质点的速度公式是一样的。这就是说，平面运动刚体上各质点速度的分布情况与将刚体看成绕速度瞬心 C（即过 C 点并且垂直于运动平面的轴）作定轴转动时的速度分布情况完全相同，从这个意义上讲，速度瞬心也就是瞬时转动中心，简称**瞬心**。

必须注意，瞬心的速度虽然等于零，但它的加速度并不等于零（见例 1.2），因此它不再是下一时刻的瞬心，所以瞬心不论在固定系或固连系上的位置，都是随时间而变的。

有时，我们可用作图法求出瞬心的位置。由瞬心存在性的证明可知，瞬心位于刚体上任一点速度的垂直线上，因此当已知刚体上任意两点 A、B 的速度 $\boldsymbol{V}_A$ 与 $\boldsymbol{V}_B$ 的方向时，过 A、B 分别作这两点速度的

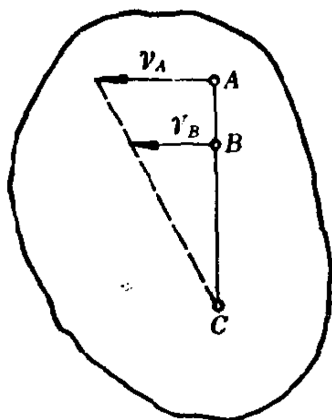


图 1-21

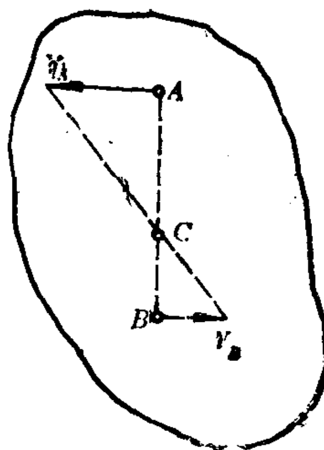


图 1-22

垂直线，它们的交点 C 就是瞬心了。当然也可能出现 $\boldsymbol{V}_A /\!/ \boldsymbol{V}_B$ 且 $\boldsymbol{V}_A$、$\boldsymbol{V}_B$ 与 AB 联线相垂直的情况，这时就还需知道这两点速度的大小，然后由图 1-12 或图 1-13 所示的方法求出瞬心。如在某瞬时，$\boldsymbol{V}_A$ 与 $\boldsymbol{V}_B$ 不但方向相同，而且大小也相等，则该瞬时刚体上各点的速度均相同，这时，称刚体作瞬时平动（瞬心在无穷远处）。

例 1.10 瞬心的求法。图 1-23 所示为曲柄连杆机构，已知曲柄 OA 长为 R，角速度为 $\omega_1(t)$，连杆 AB 长为 l，试求连杆 AB 的瞬心位置及滑块 B 的速度 $\boldsymbol{v}_B$。

【解】 连杆 AB 作平面运动。因曲柄上 A 点及滑块 B 点的速度方向均为已知，因此可求出瞬心 C 的位置如图 1-23 所示。设角 θ 与角 φ 如图所示，那么，对 $\triangle ABC$ 可由正弦定理求得

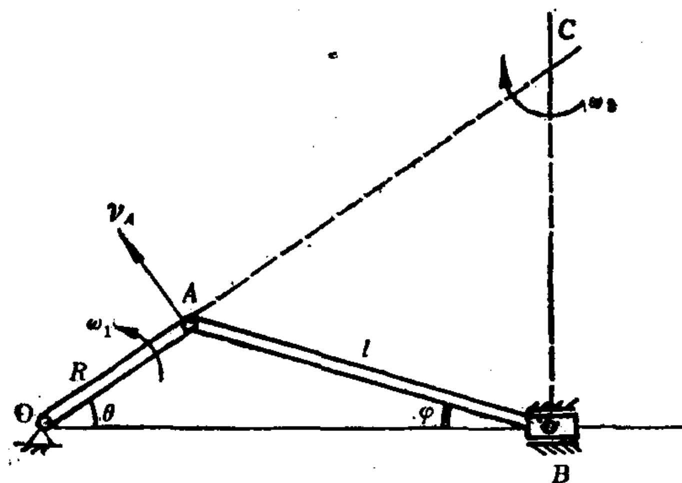


图 1-23

$$\overline{AC} = \frac{l}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{l\cos\varphi}{\cos\theta}$$

所以 AB 杆的角速度为

$$\omega_2 = \frac{v_A}{\overline{AC}} = \frac{R\omega_1\cos\theta}{l\cos\varphi}$$

从而求得 B 点的速度为

$$v_B = \overline{CB}\,\omega_2 = \frac{l\sin(\theta+\varphi)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \cdot \frac{R\omega_1\cos\theta}{l\cos\varphi}$$

$$= \frac{R\omega_1 \sin(\theta+\varphi)}{\cos\varphi}$$

$\boldsymbol{v}_B$ 的方向指向 O 点。显然角 θ 与角 φ 之间存在关系式

$$R\sin\theta = l\sin\varphi$$

由以上可以看到，当 $\theta=\varphi=0$，即 O、A、B 在一直线上时，B 点就是瞬心，这时 $\omega_2 = \frac{R\omega_1}{l}$；当 $\theta = \frac{\pi}{2}$，即 OA 垂直于 OB 时，$\boldsymbol{v}_A$ 与 $\boldsymbol{v}_B$ 相平行，由速度投影定理求出 $v_A = v_B$，因而 $\omega_2 = 0$，这是瞬时平动。

例1.11 半径为 R 的轮子沿直线轨道作纯滚动，已知轮心 G 的速率为常数 u，如图 1-24 a 所示，试求轮上各点的速度分布。

【解】 轮子作平面运动。设 C 为轮缘与轨道的接触点，在例 1.2 中已算得 $v_C=0$，即接触点 C 是轮子的瞬心，则由(1.29)式可得轮上各点的速度分布，如图 1-24 b 中实线所示。

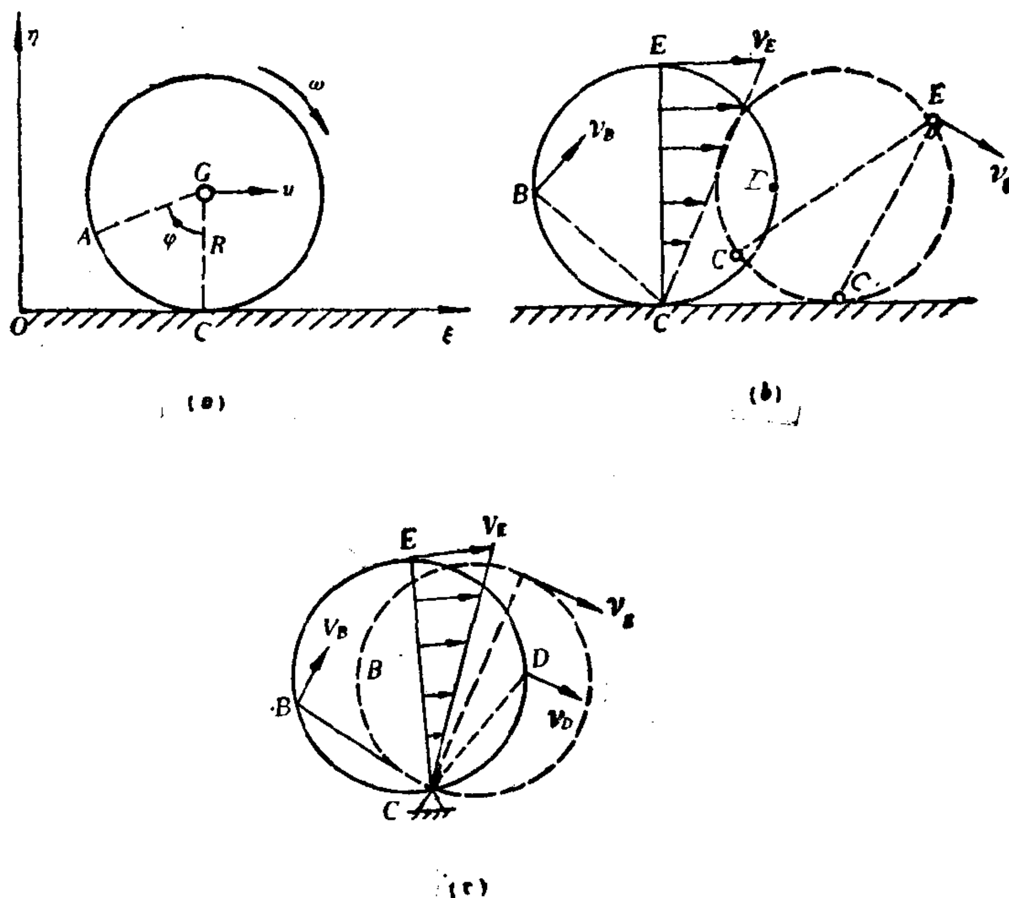


图 1-24

由图1-24 b立即可知几个特殊点B、D、E的速率：$V_B = V_D = \sqrt{2}\,u$，$V_E = 2u$，各点速度的方向如图示。为了说明纯滚动与定轴转动的区别，图c画出了轮子作定轴转动时的速度分布，图中虚线代表下一瞬时轮子的位置，显然它与图b虚线所示的速度分布不同。

§1.3 刚体的定点转动和一般运动

1. 刚体定点转动位置的确定；欧拉角

设刚体运动时，在它上面（或是它的扩大体上）有一固定不动的点，则称此刚体作**定点转动**。例如，玩具陀螺绕其与地面的接触点作定点转动；又如在汽车等传动机构中常用的十字头AOB绕固定点O作定点转动（图 1-25）。图 1-26 是卡尔登环。

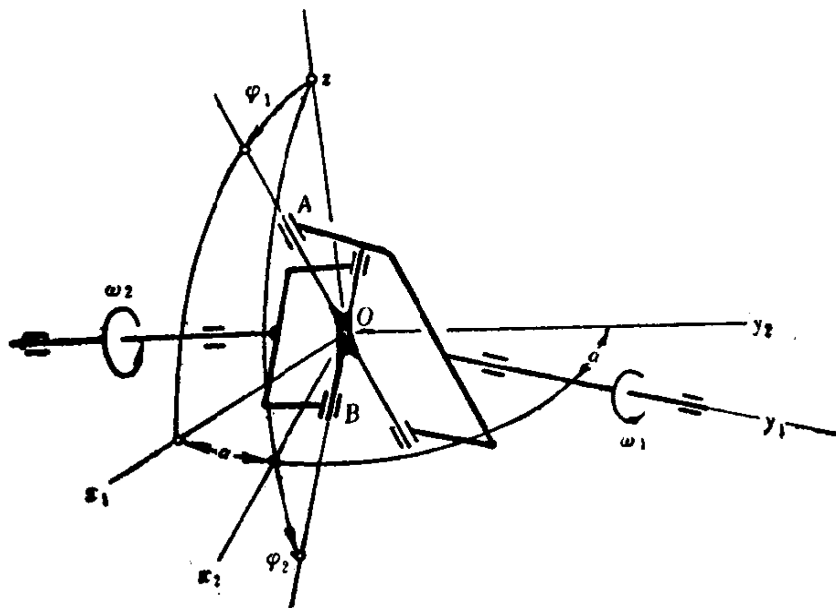


图 1-25

为了决定作定点转动刚体的位置，像平面运动时一样，建立两个右手正交坐标系（图1-27）：一个是固定系$O\xi\eta\zeta$系，其原点O就是刚体的固定点；另一个是固连于刚体上的$Oxyz$系，称为固连系。因此刚体的位置完全可由固连系相对于固定系的位置来确定。例如可由两组坐标系间的方向余弦（共九个量）决定，但在由这九个量组成的正交矩阵

中，只有三个量是独立的，所以刚体绕固定点自由转动时，自由度的

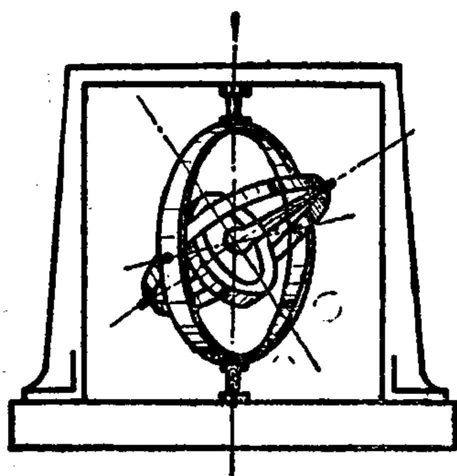


图 1-26

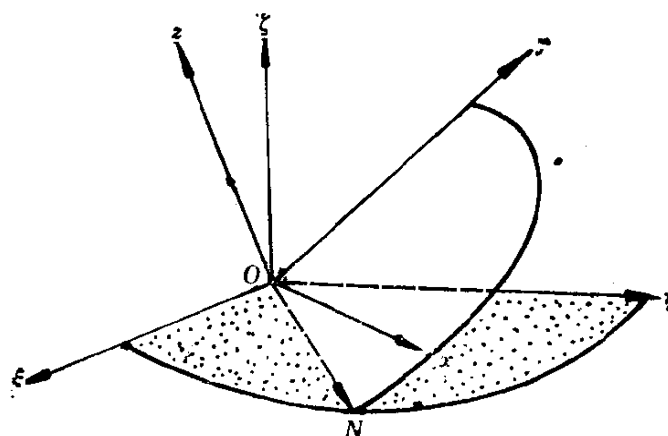


图 1-27

数目也是 3。通常选取三个独立的角度 ψ、θ、φ 来描述刚体的位置，ψ、θ、φ 称之为**欧拉角**，它们是这样定义的(图 1-28)：

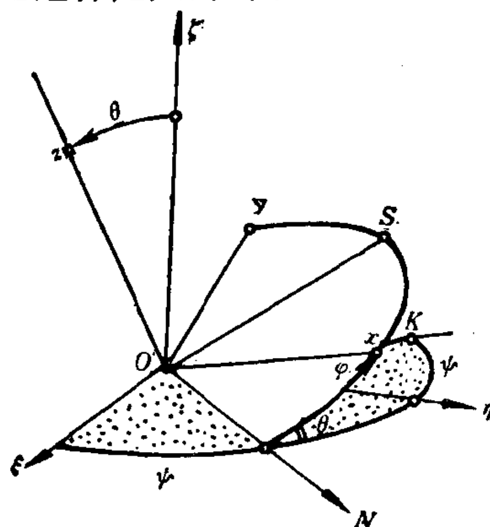


图 1-28

先作出 Oxy 与 $O\xi\eta$ 两平面的交线 ON，这条交线称之为**节线**，即 $\boldsymbol{N}^0=\boldsymbol{\zeta}^0\times\boldsymbol{z}^0$。于是**进动角** $\psi=\angle\xi ON$ 在 $O\xi\eta$ 平面内；**章动角** $\theta=\angle\zeta Oz$，即 Oxy 与 $O\xi\eta$ 两平面之间的夹角；

自转角 $\varphi=\angle NOx$，在 Oxy 平面内。

三个欧拉角的变化范围分别为

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant\psi\leqslant2\pi \tag{1.30}$$

它们的正负向是这样规定的(见图 1-27)：先决定节线 ON 的正向，通常是沿 ON 的正向看，$O\zeta$ 轴依逆时针方向转一最小角度而至 Oz 轴，于是，分别从 ON、$O\zeta$、Oz 轴的正向看，θ 角从 $O\zeta$ 到 Oz，ψ 角从 $O\xi$ 到 ON，φ 角从 ON 到 Ox，它们均以逆时针方向为正，反之则为负。

在利用欧拉角来描述刚体的定点转动时，关键是选定刚体上的 Oz 轴，由此就可定出节线 ON。一般说来，Oz 轴是可以任意选取的，但为了计算方便和易于识别，常选取刚体的对称轴或自转轴作为 Oz 轴。

作定点转动的刚体，其运动规律由三个欧拉角与时间的关系给出，即

$$\psi=\psi(t),\ \theta=\theta(t),\ \varphi=\varphi(t) \tag{1.31}$$

2. 角速度矢量

对于作定轴转动和平面运动的刚体，由于转动轴是沿着固定方向的(不一定存在固定轴)，转角 $\varphi(t)$ 在同一平面内，所以当定义了角速度的大小 $|\dot{\varphi}|$ 后，就不难定义角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 了。但是对于绕定点转动的刚体，因为只存在固定点，而不存在固定的转动方向，因此角速度矢量的定义方法就与以前不同。

刚体作定点转动时，它与一个球面（球心就是固定点 O，半径可以任取)的截面 S 将始终在该球面上(图 1-29)，因此，截面 S 的运动就可代表刚体的运动。现在假设由时刻 t 到时刻 $t+\Delta t$，S 运动到 S'(图 1-30)，S 中的大圆弧段 $\widehat{AB}$ 运动到 $\widehat{A'B'}$，作 $\widehat{AA'}$ 的垂直平分面和 $\widehat{BB'}$ 的垂直平分面，设这两个平面的交线是 OK，OK 与球面的交点是 C^*，则两个球面三角形 C^*AB 与 $C^*A'B'$ 全同，所以刚体在有限时间 Δt 内的运动就是刚体绕 OC^* 轴所转过的角度 $\Delta\alpha$（即球面角 AC^*A')。当时间间隔 Δt 趋于零时，$\Delta\alpha$ 也趋于零，而转轴 OC^* 趋于某一极限位置 OC。轴 OC 就称为刚体在时刻 t 的**瞬时转动轴**，简称**瞬时轴**。刚体在不同瞬时，各瞬时轴的位置不同，刚体的转动就看成为顺次绕通过定点 O 的一系列瞬时轴的转动。

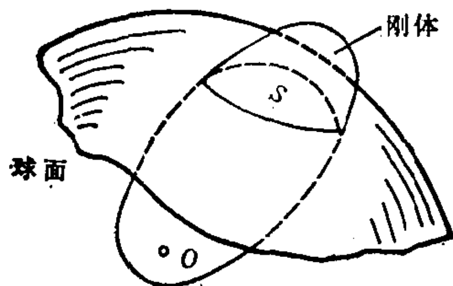


图 1-29

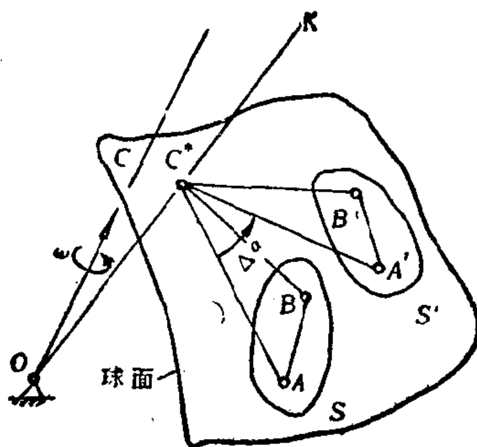


图 1-30

现在来定义角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 。当 $\Delta\alpha$ 是无限小量时，可用矢量 $\Delta\boldsymbol{\alpha}$ 表示无限小转动，它的大小就是 $\Delta\alpha$，它的方向沿轴 OC^*，并服从右手螺旋法则。因此，$\dfrac{\Delta\boldsymbol{\alpha}}{\Delta t}$ 也是沿轴 OC^* 的矢量，被称之为在时间间隔 Δt 内的平均角速度 $\boldsymbol{\omega}^*$，当 Δt 趋于零时，就得到刚体在时刻 t 的瞬时角速度，即

$$\boldsymbol{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{\omega}^*=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\alpha}}{\Delta t} \tag{1.32}$$

$\boldsymbol{\omega}$ 的方向沿瞬时轴 OC，如图 1-30 所示。

必须指出，与定轴转动时不同，作定点转动的刚体，其无限小转动的转角 $\Delta\alpha$ 已不代表某一角度对时间的微分。另外，虽然角速度$\boldsymbol{\omega}$是个矢量，但它与力、速度等矢量仍然是有区别的，因为 $\boldsymbol{\omega}$ 的正向是人为决定的，现在是按右手螺旋法则规定其正向的，如按左手螺旋法则，则其方向就要相反，因此角速度实际上是“赝矢量(轴矢量)”，它应是一个反对称张量，有关证明可见参考文献[4]。

由于瞬时轴的位置随时间 t 而改变，因此角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的大小和方向都随时间变化。角速度矢量对时间的一阶导数，称为刚体绕定点转动的角加速度矢量，用 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示，即

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{1.33}$$

现在讨论 当刚体作定点转动时，若已知它的三个欧拉角，即已知其运动规律(1.31)式，如何写出刚体角速度的表达式，也就是要求固连系 $Oxyz$ 相对于固定系 $O\xi\eta\zeta$ 的角速度 ω。前已指出，由于 $Oxyz$ 系的运动可看成是分别绕 $O\zeta$、ON 和 Oz 轴三次转动的合成，又因无限小转动是矢量(见附录 I)，因此，可把刚体所作的任一无限小转动 $\Delta\alpha$ 表示为三种转动的矢量和，即

$$\Delta\boldsymbol{\alpha} = \Delta\psi\boldsymbol{\zeta}^0 + \Delta\theta\boldsymbol{N}^0 + \Delta\varphi\boldsymbol{k}$$

由(1.32)式，得刚体的角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\alpha}}{\Delta t} = \dot{\psi}\boldsymbol{\zeta}^0 + \dot{\theta}\boldsymbol{N}^0 + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} = \dot{\boldsymbol{\psi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1.34}$$

即刚体角速度是进动角速度 $\dot{\boldsymbol{\psi}}$、章动角速度 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 和自转角速度 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ 三者之矢量和。

为了求得 $\boldsymbol{\omega}$ 在固连系 $Oxyz$ 中的投影式，就要先求(1.34)式中的单位矢量 $\boldsymbol{\zeta}^0$ 和 $\boldsymbol{N}^0$ 在 $Oxyz$ 系中的投影式，根据图 1-28，因 OS 轴在 Oxy 平面内，且与 ON 轴相垂直，所以 Oz、$O\zeta$ 和 OS 三根轴共面，于是有下列关系式：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\zeta}^0 = \cos\theta\boldsymbol{k} + \sin\theta\,\boldsymbol{S}^0 \\ \boldsymbol{S}^0 = \sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}\end{cases}$$

将上式代入(1.34)式即得 $\boldsymbol{\omega}$ 在 $Oxyz$ 系中的投影式为

$$\begin{cases}\omega_x = \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \omega_y = \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\end{cases} \tag{1.35}$$

同样可求得 $\boldsymbol{\omega}$ 在固定系 $O\xi\eta\zeta$ 中的投影式为

$$\begin{cases}\omega_\xi = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_\eta = -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_\zeta = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\end{cases} \tag{1.36}$$

(1.35)式和(1.36)式通常称为**欧拉运动学方程**。

3. 定点转动刚体上各点的速度和加速度分布

设刚体绕固定点 O 转动，在 Δt 时间内，刚体绕 OA 轴转过无限小角度 $\Delta\theta$。刚体上 M 点的矢径由 $\boldsymbol{r}$ 转到 $\boldsymbol{r}_1$（图1-31），则 M 点的无限小位移（只考虑一阶无限小量）为

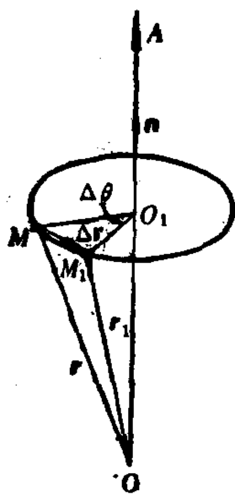


图 1-31

$$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r} \tag{1.37}$$

速度为

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\theta}}{\Delta t}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

即

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{1.38}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 是刚体的角速度，$\boldsymbol{r}$ 是 M 点的矢径，即 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{OM}$。(1.38)式就是定点转动刚体的速度分布公式，它与定轴转动的速度公式(1.22)在形式上是完全一样的，但它们之间有着根本的差别，即在定轴转动中刚体上有一根固定的转轴，而定点转动是绕瞬时轴转动的。

为求 M 点的加速度矢量 $\boldsymbol{a}$，可将(1.38)式关于时间求一次导数，即得

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{1.39}$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}=\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ 是刚体的角加速度。公式(1.39)在形式上与定轴转动的加速度公式(1.23)完全相同，但这里由于 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向是随时间而变化的，因此 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 不一定与 $\boldsymbol{\omega}$ 平行，从而不能把 $\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}$ 简单地理解为"切向"加速度。

例 1.12 规则进动。图1-32 *a*所示的刚体作定点转动，已知其章动角θ保持不变，而且其进动角速度 $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ 和自转角速度 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ 的大小都是常数（这种运动就称为**规则进动**），试求刚体的角加速度 $\boldsymbol{\varepsilon}$。

【解】 因为 $\theta=$常数，则章动角速度 $\dot{\theta}=0$，由(1.34)式，刚体的角速度矢量为

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\boldsymbol{\psi}}+\dot{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1}$$

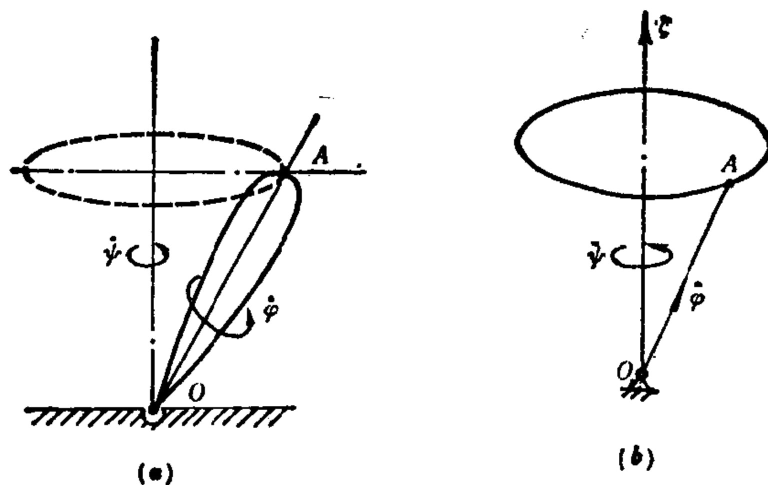


图 1-32

刚体的角加速度矢量为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\psi}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\varphi}}}{\mathrm{d}t}$$

另外，由于进动角速度矢量 $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ 是常矢量，即

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\psi}}}{\mathrm{d}t}=0$$

所以

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\varphi}}}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

同时，$\boldsymbol{\varphi}$ 是一个大小为常数、方向沿 Oz 轴的矢量，而刚体内任两点间的距离为常数，所以不妨把 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ 看成是刚体内以 O、A为始、终点的矢量(图1-32b)，由于 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}=\overrightarrow{OA}$，则由(2)式，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 就是矢端 A 点的速度，所以

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\varphi}}=(\dot{\boldsymbol{\psi}}+\dot{\boldsymbol{\varphi}})\times\dot{\boldsymbol{\varphi}}=\dot{\boldsymbol{\psi}}\times\dot{\boldsymbol{\varphi}}$$

那么

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\dot{\boldsymbol{\psi}}\times\dot{\boldsymbol{\varphi}} \tag{3}$$

这就是说，刚体作规则进动时，其角加速度等于进动角速度与自转角速

度的矢量积。

例 1.13 设车轮沿水平面上半径为 R(圆心为 O_1)的圆周轨道 作纯滚动，且轮面始终保持竖直(图 1-33 a)，已知轮心 G 具有常速率 u，轮半径为 r。试求轮上最高点 B 的速度 $\boldsymbol{v}_B$ 和加速度 $\boldsymbol{a}_B$。

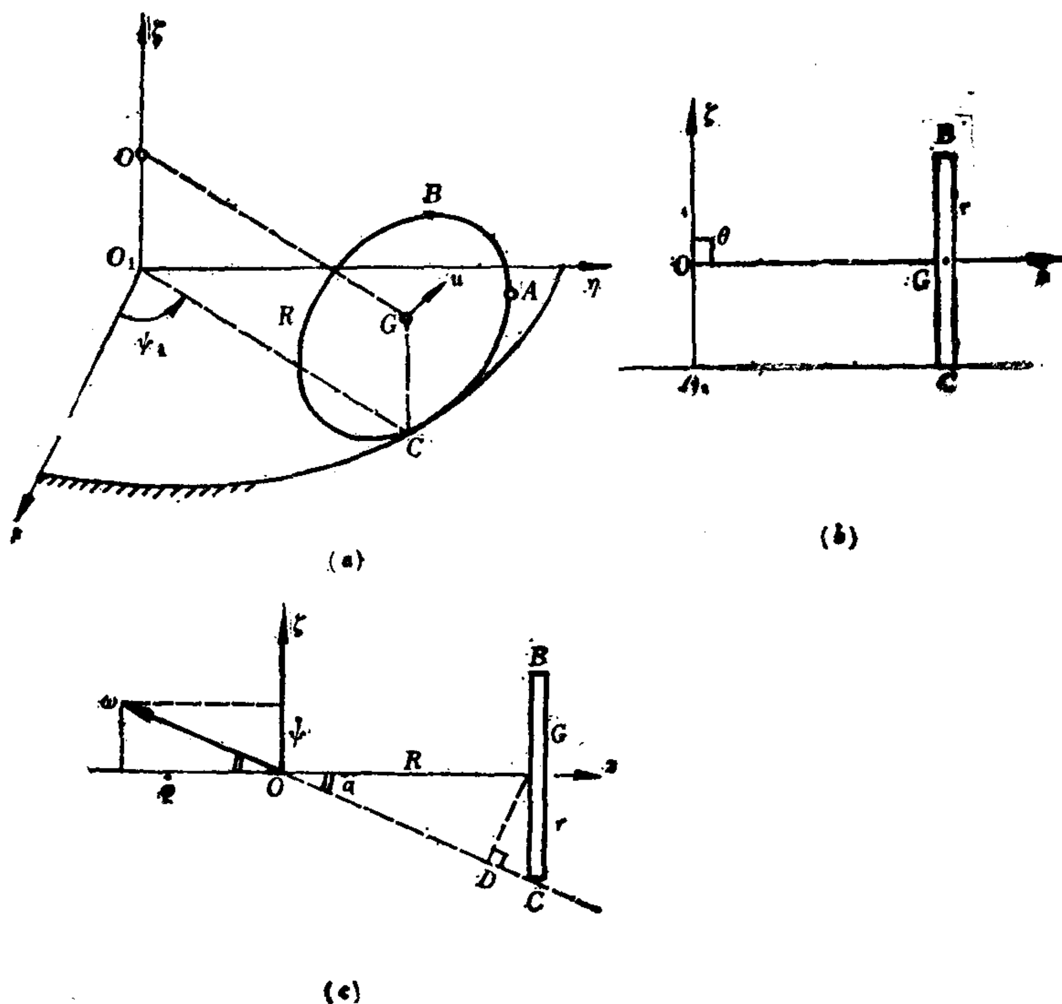


图 1-33

【解】 虽然轮子作定点转动，但由于固定点不在轮子上，因此，轮轴 OG 与铅垂线 $O_1\zeta$ 的交点 O(图 1-33 a)就是它的固定点。取固定系 $O_1\xi\eta\zeta$，$O_1\zeta$ 铅垂向上，再作固连系 $Oxyz$，Oz 过轮心 G，如图 b (x，y 轴未画)，则节线 ON 垂直纸面朝内，三个欧拉角为：$\psi=\psi_1+\dfrac{\pi}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 和 φ (图上未画)，其中 ψ_1 角是 ζOz 平面与固定平面 $\xi O_1\zeta$ 的夹角，称之为**经度角**，它与进动角 ψ 本质上是一样的，显然，$\dot{\psi}_1=\dot{\psi}$。

先求轮子的角速度 $\boldsymbol{\omega}$。由于已知轮子只滚不滑，接触点 C 的速度 $\boldsymbol{v}_C=0$，所以 OC 就是瞬时转动轴，即轮子的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 是沿 OC 线的，设 $GD\perp OC$（图 c），则

$$\omega=\frac{v_G}{GD}=\frac{u}{r\cos\alpha},\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{r}{R}$$

由图 c 可求得

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}=\frac{u}{R}\boldsymbol{\zeta}^0,\quad \dot{\boldsymbol{\varphi}}=-\frac{u}{r}\boldsymbol{z}^0 \tag{1}$$

又因为 $\dot{\theta}=0$，故轮子的角速度为

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{u}{R}\boldsymbol{\zeta}^0-\frac{u}{r}\boldsymbol{z}^0 \tag{2}$$

所以轮子作规则进动。由上例知，角加速度为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\dot{\boldsymbol{\psi}}\times\dot{\boldsymbol{\varphi}}=-\frac{u^2}{rR}\boldsymbol{N}^0 \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{N}^0$ 为节线的单位矢量，现在 Oz、ON 与 $O\zeta$ 组成正交系，于是，由(1.38)式和(1.39)式就可求得 $\boldsymbol{v}_B$ 和 $\boldsymbol{a}_B$。因为

$$\overrightarrow{OB}=R\boldsymbol{z}^0+r\boldsymbol{\zeta}^0$$

所以

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OB}=2u\boldsymbol{N}^0 \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_B&=\boldsymbol{\varepsilon}\times\overrightarrow{OB}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_B\\&=-\frac{3u^2}{R}\boldsymbol{z}^0-\frac{u^2}{r}\boldsymbol{\zeta}^0\end{aligned} \tag{5}$$

及

$$|\boldsymbol{a}_B|=u^2\sqrt{\frac{9}{R^2}+\frac{1}{r^2}} \tag{6}$$

4. 刚体的一般运动

刚体作**一般运动**时不受任何限制，可在空间作自由运动。例如，飞机、人造卫星的运动。为了确定这种自由刚体的位置，可以先决定刚体上任意一点 A（称为基点）的位置，这需要三个坐标，此时刚体就只

能绕 A 点运动了，根据上面的讨论，再由三个欧拉角就可确定其位置，所以空间的自由刚体共有六个自由度。

类似于平面运动时的分析方法，我们建立三个坐标系(图 1-34)：固定系 $O\xi\eta\zeta$，固连系 $Axyz$，平动系 $A\xi'\eta'\zeta'$，其中 A 在刚体上，称为基点，因为刚体在平动参考系中是作定点转动，所以刚体的一般运动可看成平动和定点转动的合成，其运动规律是

$$\begin{cases}\xi_A=\xi_A(t),\ \eta_A=\eta_A(t),\ \zeta_A=\zeta_A(t)\\ \psi=\psi(t),\quad \theta=\theta(t),\quad \varphi=\varphi(t)\end{cases}\tag{1.40}$$

其中 ψ、θ、φ 是固连系相对于基点平动系的三个欧拉角。

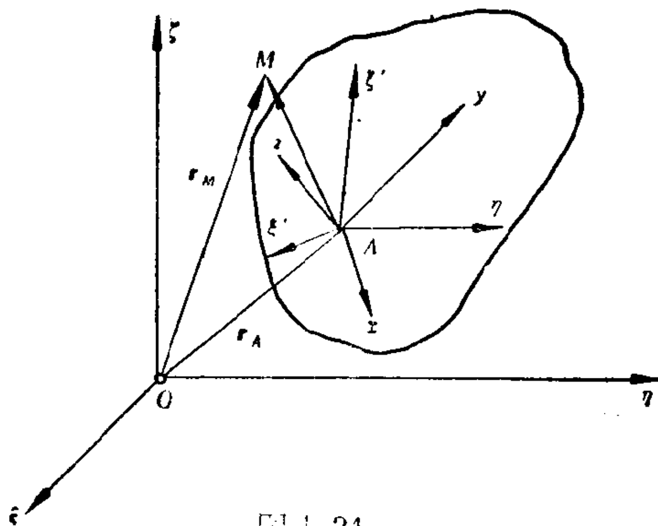


图 1-34

于是同样可求得刚体作一般运动时的速度和加速度分布公式。设 M为刚体上任一点，则其速度 $\boldsymbol{v}_M$ 和加速度 $\boldsymbol{a}_M$ 为

$$\boldsymbol{v}_M=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AM}\tag{1.41}$$

$$\boldsymbol{a}_M=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{\varepsilon}\times\overrightarrow{AM}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AM})\tag{1.42}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 是刚体的角速度，而 $\boldsymbol{\varepsilon}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$是刚体的角加速度。公式(1.41)和(1.42)与平面运动的公式(1.26)和(1.27)在形式上完全相同，但现在的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的大小和方向都随时间而改变，且加速度公式 (1.42)也不能写成(1.28)式的形式。当刚体的运动规律由(1.40)式给定时，则其角速度也可写成

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\psi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1.43}$$

还可证明（见附录Ⅱ）角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 与基点 A 的选取无关，也与固连系 $Axyz$ 的方向选择无关，所以 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 都是刚体的整体量。(1.41)式和(1.42)式同样也称为基点法速度公式和基点法加速度公式。

§1.4 质点和刚体的复合运动

前两节我们通过引进平动坐标系而把刚体的平面运动和定点转动化为两种基本运动的合成，这种把复杂运动看成为由两个或多个简单运动之合成的方法具有普遍意义，实际上也就是物体(点，刚体)相对于两个不同参考系的运动之间的关系。

本节主要讨论的是当已知一个参考系(可看作刚体)相对于另一个参考系作一般运动时，运动质点相对于这两个参考系的速度、加速度间的关系式，为了区别起见，我们把其中的一个参考系叫做**定参考系**，简称为**定系**，另一个参考系叫做**动参考系**，简称为**动系**。当然，哪个叫定系，哪个叫动系，可根据具体问题自由决定，但参考系选得好，往往可使运动的分析大大简化。

本节要用到的数学工具是矢量的相对导数，现在先来说明一下。

1. 矢量的相对导数

设有定系和动系，今在定系上建立坐标系 $O\xi\eta\zeta$，同时，又把动系看成一个刚体，并在其上建立固连系 $O'xyz$（图1-35），其单位矢量为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，再设 $\boldsymbol{\omega}$ 是动系 $O'xyz$ 的瞬时角速度。

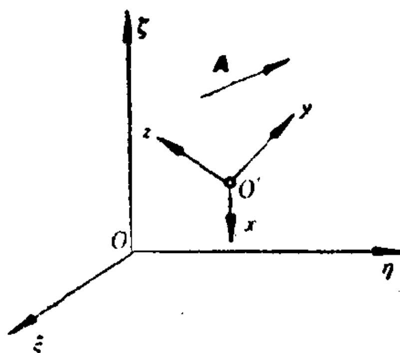


图 1-35

假设任意变矢量 $\boldsymbol{A}(t)$ 在动系 $O'xyz$ 中的表示式为

$$\boldsymbol{A}(t) = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} \tag{1.44}$$

我们把下式定义为矢量 $\boldsymbol{A}(t)$ 关于动系 $O'xyz$ 的**相对导数**(记作

$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{A}}{dt}$)

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{dA_x}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dA_y}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dA_z}{dt}\boldsymbol{k}$$

也就是说，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的相对导数 $\frac{\tilde{d}\boldsymbol{A}}{dt}$ 仍是一个矢量，它在各坐标轴上的投影就等于矢量 $\boldsymbol{A}$ 在该坐标轴上投影的导数。如果把矢量$\boldsymbol{A}$关于定系 $O\xi\eta\zeta$ 的导数 $\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}$ 称做**绝对导数**，则两者之间的关系为

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{\tilde{d}\boldsymbol{A}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A} \tag{1.45}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}=\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}$。为证明(1.45)式，只要将矢量式(1.44)关于时间 t 求绝对导数，并注意到由于单位矢量 $\boldsymbol{i}$ 的大小是不变的，因此可把 $\boldsymbol{i}$ 的两个端点看作是动系(刚体)中的两点 O' 和 I (图 1-36)，即 $\boldsymbol{i}=\overrightarrow{O'I}=\boldsymbol{r}_I-\boldsymbol{r}_{O'}$，再由基点法公式(1.41)，可得：

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=\boldsymbol{v}_I-\boldsymbol{v}_{O'}=\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{O'I}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}$$

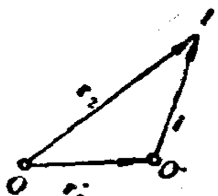


图 1-36

同理

$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}$$

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}$$

矢量相对导数的公式(1.45)是很有用的，现在来看几个特殊情形。首先，如果动系作平动，即 $\omega=0$，代入(1.45)式，可得

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{\tilde{d}\boldsymbol{A}}{dt}$$

即在平动参考系中，相对导数和绝对导数是相同的。其次，如果矢量 $\boldsymbol{A}$ 固连于动系，即将 $\frac{\tilde{d}\boldsymbol{A}}{dt}=0$ 代入(1.45)式，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}$$

若 $|\boldsymbol{A}|=1$，上式就是单位矢量导数公式，其中 $\boldsymbol{\omega}$ 是动系的角速度。

在使用矢量相对导数公式（1.45）时，要特别注意两个不同的坐标系，为此可引进如下的记法。设有两个参考系，分别记作甲和乙，把参考系乙相对于参考系甲的角速度记作 $_{甲}\boldsymbol{\omega}_{乙}$，则（1.45）式成为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{甲}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{乙}+{}_{甲}\boldsymbol{\omega}_{乙}\times\boldsymbol{A} \qquad (1.46)$$

当然在具体计算时要把（1.46）式中右端的矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $_{甲}\boldsymbol{\omega}_{乙}$ 在乙系中投影。

2．点的速度合成公式

利用相对导数公式可讨论点的复合运动公式。首先介绍几个名词术语。点相对于定参考系的运动称为**绝对运动**，各种量前都加上“绝对”二字，如绝对轨迹、绝对速度 $\boldsymbol{v}_a$ 和绝对加速度 $\boldsymbol{a}_a$ 等，而把点相对于动参考系的运动称为**相对运动**，相应地有相对轨迹、相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 及相对加速度 $\boldsymbol{a}_r$ 等。

现在先讨论点的绝对速度和相对速度之间的关系。

设点 M 在定系 $O\xi\eta\zeta$ 中的矢径为 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，在动系 $O'xyz$ 中的矢径为 $\boldsymbol{r}'=\overrightarrow{O'M}$（图 1-37），令 $\boldsymbol{r}_{O'}=\overrightarrow{OO'}$，则

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{O'}+\boldsymbol{r}'$$

将上式两边求绝对导数，得

$$\boldsymbol{v}_a=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{O'}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} \qquad (1.47)$$

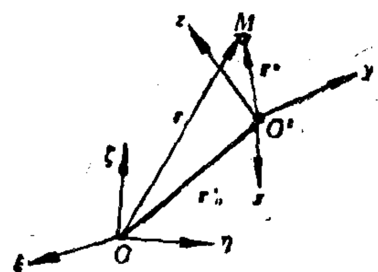


图 1-37

其中 $\boldsymbol{v}_a$ 是 M 点的**绝对速度**，而右端第一项 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{O'}}{\mathrm{d}t}$ 是动系原点 O' 的绝对速度 $\boldsymbol{v}_{O'}$；右端第二项 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}$ 是动系中矢量 $\boldsymbol{r}'$ 关于定系的导数，根据相对导数的公式（1.45）可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 是动系（看作刚体）的角速度矢量，令 $\boldsymbol{v}_r=\dfrac{\widetilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}$，它就是 M 点的**相对速度**。把以上各式代入（1.47）式后，就得到

$$v_a=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{v}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}' \tag{1.48}$$

令

$$\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{v}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}' \tag{1.49}$$

根据基点法速度公式(1.42)，$\boldsymbol{v}_e$ 正是动系(刚体)上该瞬时与 M 点相重合的 $\overline{M}$ 点的速度，称为 M 点的**牵连速度**，而把点 $\overline{M}$ 称为 M 的**牵连点**。于是（1.48）式就成为

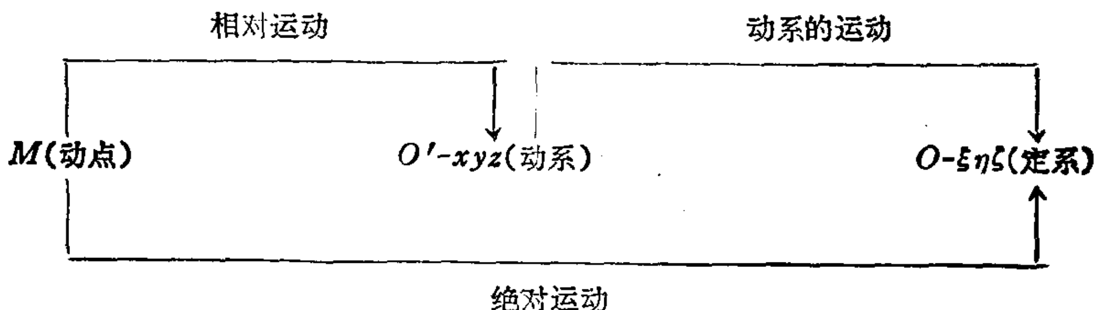
$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{v}_e \tag{1.50}$$

上式称之为**点的速度合成公式**，即点的绝对速度等于相对速度和牵连速度的矢量和。

有时为了明确表明点 M 对于某参考系甲的速度，可记作 $_{甲}\boldsymbol{v}_M$，其加速度为 $_{甲}\boldsymbol{a}_M$，设甲为定系，乙为动系，则 $_{甲}\boldsymbol{v}_M=\boldsymbol{v}_a$，$_{乙}\boldsymbol{v}_M=\boldsymbol{v}_r$，而 $_{甲}\boldsymbol{v}_{\overline{M}}=\boldsymbol{v}_e$（$\overline{M}\in$ 乙），所以点的速度合成公式也可写成

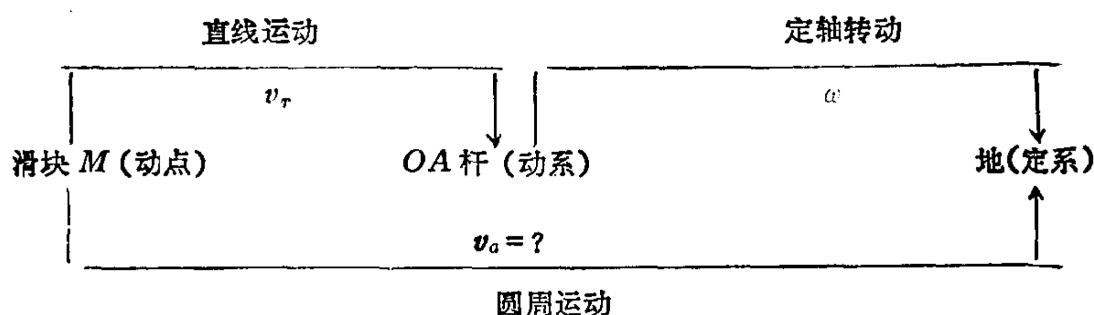
$$_{甲}\boldsymbol{v}_{\overline{M}}={}_{甲}\boldsymbol{v}_{\overline{M}}+{}_{乙}\boldsymbol{v}_{\overline{M}}(\overline{M}\in乙) \tag{1.51}$$

在应用（1.50）式解题时，首先要确定动点 M，建立定系和动系，通常动系是某个刚体，它的运动是已知的；然后按定义分析 M 点的绝对运动、相对运动及 $\boldsymbol{v}_a$、$\boldsymbol{v}_r$、$\boldsymbol{v}_e$ 等。为了减少在分析题目时的文字叙述，有时可采用如下的框图。



例 1.14 杆子 OA 绕轴 O 以匀角速 ω 转动，并带动滑块 M 在半径为 R 的固定圆槽内滑动，设 $\overline{OC}=l$，试求当杆 OA 在竖直位置（图 1-38 a）时，滑块 M 的绝对速度 $\boldsymbol{v}_M$。

【解】 滑块机构中的滑块常可看成为作复合运动的点，现将杆子 OA 取作动系，由题意可画出如下框图：



怎样求 M 点的牵连速度 $\boldsymbol{v}_e$? 这就先要找牵连点 $\overline{M}$，它是 OA 杆上的点，该瞬时与滑块 M 重合，因为 OA 作定轴转动，所以 $\overline{M}$ 点是作圆周运动(圆心为 O，半径为 $\sqrt{R^2-l^2}$)，那么

$$\boldsymbol{v}_e=-\omega\sqrt{R^2-l^2}\,\boldsymbol{i}$$

一般来说，在不同瞬时，牵连点具有不同的位置，牵连速度也不相同。例如，当 OA 杆在水平位置(向左)时，滑块的牵连点 $\overline{M}$ 在 OA 上离 O 点的距离就是 $(R-l)$ 了。

相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 的大小未知，但方向沿 OA 杆，即有

$$\boldsymbol{v}_r=v_r\boldsymbol{j}$$

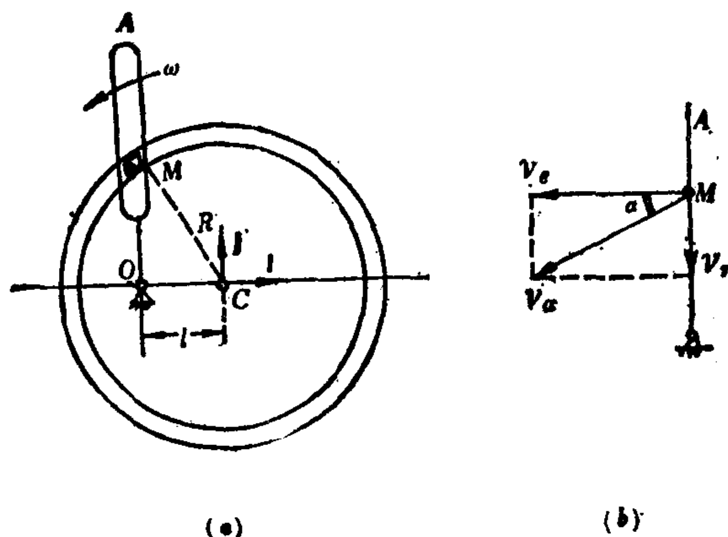


图 1-38

绝对速度 $\boldsymbol{v}_a$ 的方向垂直于圆槽的半径 CM，设 $\boldsymbol{v}_a$ 与水平线的夹

角为 α（图 (b)），则

$$\boldsymbol{v}_a = -v_a(\cos\alpha\boldsymbol{i}+\sin\alpha\boldsymbol{j})$$

由速度合成公式 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$，得

$$\begin{cases}-v_a\cos\alpha=-\omega\sqrt{R^2-l^2}\\ -v_a\sin\alpha=v_r\end{cases}$$

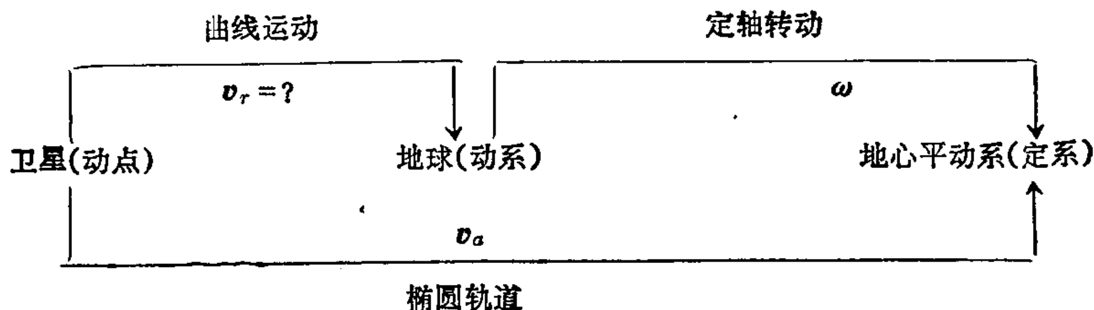
又因 $\sin\alpha=l/R$，即可解得

$$v_a=\omega R,\quad v_r=-\omega l\quad（方向指向 O 点）$$

例 1.15 人造地球卫星的相对速度。某人造地球卫星的轨道平面与地球赤道平面的倾角为 α，卫星轨道近地点 P 位于地球北纬 φ 度的上空，该点到地心 O 的距离为 $\overline{OP}=R$。已知卫星在 P 点处的绝对速度为 $\boldsymbol{v}_a$，试求在该位置时卫星相对于地面的速度 $\boldsymbol{v}_r$（大小和方向）。设地球自转角速度为 ω。

【解】 图 1-39 a 是人造卫星轨道与地球的示意图，图 b 是以地心 O 为球心、也以 $\overline{OP}$ 为半径的球面。

取卫星为动点，画出框图如下：



今建立固连于地球的直角坐标系 $\overline{P}xyz$，这时，$\overline{P}$点在地球的扩大体上，且该瞬时恰与卫星近地点 P 相重合。轴 $\overline{P}z$ 通过地心 O指向天顶，轴 $\overline{P}x$ 指东（与纬圈相切），轴 $\overline{P}y$ 指北（与子午线相切），如图 b 所示，设沿 x、y、z 轴的单位矢量分别为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$。

容易看出，卫星的牵连速度为

$$\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{v}_{\overline{P}}=R\omega\cos\varphi\boldsymbol{i} \tag{1}$$

卫星的绝对速度 $\boldsymbol{v}_a$ 沿椭圆轨道在 P 点的切向，因 P 是近地点，故 $\boldsymbol{v}_a\perp\overline{OP}$，即 $\boldsymbol{v}_a$ 在 $\overline{P}xy$ 平面内。设 $\boldsymbol{v}_a$ 与 x 轴的夹角为 β(图 c)，

则可由余弦定理求得相对速度的大小为

$$v_r=\sqrt{v_a^2+v_e^2-2v_av_e\cos\beta}\tag{2}$$

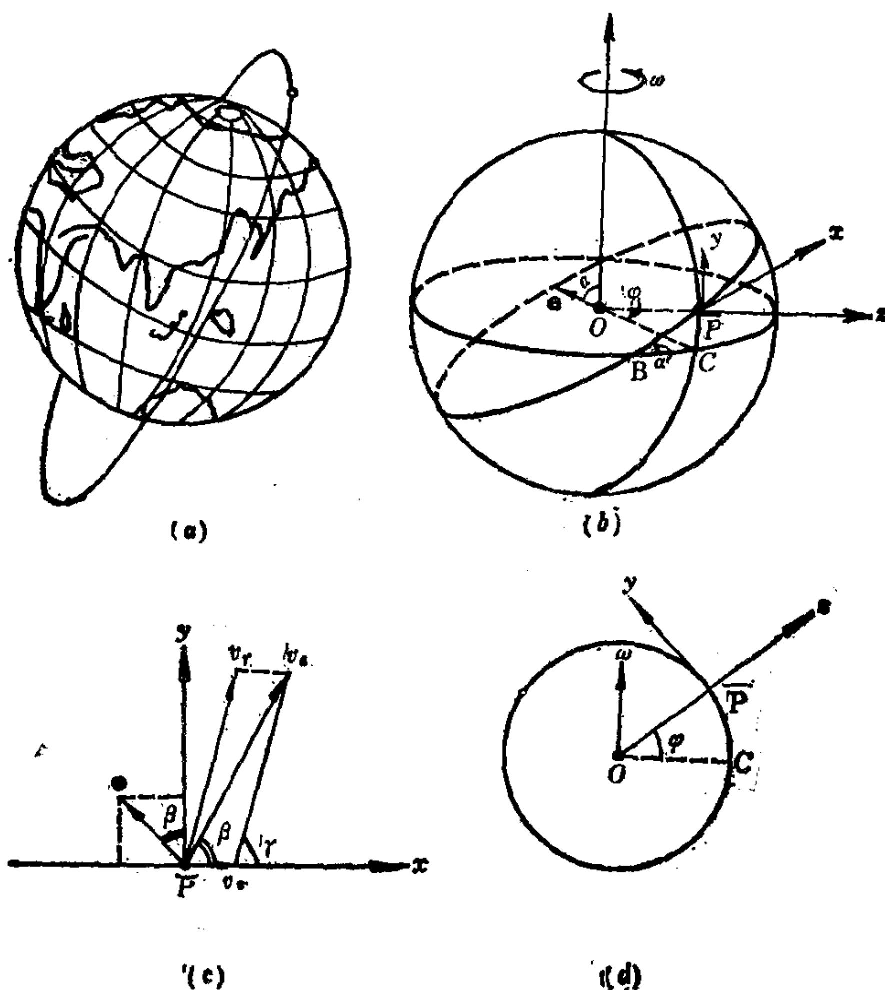


图 1-39

现在要求 β 角。设 $\boldsymbol{e}$ 是卫星轨道平面的法线的单位矢量，则 $\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{k}$ 及 $\boldsymbol{e}\perp\boldsymbol{v}_a$（图 c），又由 $\boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{i}$（图 d）可得 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 在动系中的表示式为

$$\boldsymbol{e}=-\sin\beta\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\omega\cos\varphi\boldsymbol{j}+\omega\sin\varphi\boldsymbol{k}$$

所以

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{e}=\omega\cos\varphi\cos\beta$$

又

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{e}=\omega\cos\alpha$$

由以上两式可得

$$\cos\beta=\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi} \tag{3}$$

由图 c 还可求得 $\boldsymbol{v}_r$ 与 x 轴的夹角 γ，即

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{v_a\sin\beta}{v_a\cos\beta-v_e} \tag{4}$$

例如，我国于 1970 年 4 月 24 日发射的"东方红－1"人造地球卫星，其轨道倾角为 $\alpha=68.5°$，近地点高度为439 km，远地点高度是2384 km，又设轨道近地点位于北纬 $\varphi=35°$ 的上空，如取地球的平均半径为 $R_0=6371\,\text{km}$，则近地点极径 $\overline{OP}=R=6371\,\text{km}+439\,\text{km}=6810\,\text{km}$，并可算得卫星在近地点的绝对速度是 $v_a=8.11\,\text{km/sec}$（参阅文献[6]），这样可算得：

$$v_e=R\omega\cos\varphi=0.406\,\text{km/sec}$$

$$\cos\beta=\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}=0.447,\quad \beta=63°27'$$

$$v_r=\sqrt{v_a^2+v_e^2-2v_av_e\cos\beta}=7.937\,\text{km/sec}$$

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{v_a\sin\beta}{v_a\cos\beta-v_e}=2.252,\quad \gamma=66°3'$$

所以卫星在近地点处相对于地面的速度为 7.937 km/sec，其方向为当地的东方偏北 66°3′。假设卫星真是在近地点进入轨道，则就要求火箭能提供这个相对速度 $\boldsymbol{v}_r$。

3. 点的加速度合成公式

将速度合成公式（1.50）对时间 t 求导（绝对导数），得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_a}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_e}{\mathrm{d}t} \tag{1.52}$$

左端就是 M 点的绝对加速度 $\boldsymbol{a}_a$，但右端的两项并不是相对加速度和牵连加速度，为了表明其意义，先对其第一项应用相对导数公式，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

其中 $\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t}$ 就是点 M 的**相对加速度** $\boldsymbol{a}_r$，$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$ 是由于动系的角速

度 $\boldsymbol{\omega}$ 而引起的，称为附加项；再把 $\boldsymbol{v}_e$ 的表达式(1.49)代入(1.52)式右端的第二项并注意到 $\overrightarrow{O'M}=\boldsymbol{r}'$，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_e}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{O'M})\\&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{O'}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\times\overrightarrow{O'M}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}\\&=\boldsymbol{a}_{O'}+\boldsymbol{\varepsilon}\times\overrightarrow{O'M}+\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)\\&=\boldsymbol{a}_{O'}+\boldsymbol{\varepsilon}\times\overrightarrow{O'M}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{O'M})+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r\end{aligned}\tag{1.53}$$

令 $\boldsymbol{a}_e=\boldsymbol{a}_{O'}+\boldsymbol{\varepsilon}\times\overrightarrow{O'M}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{O'M})$，根据基点法加速度公式(1.43)，$\boldsymbol{a}_e$ 就是在动系(刚体)上与 M 点相重合的点 $\overline{M}$ 的加速度，称为 M 点的**牵连加速度**。这样

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_e}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r\tag{1.54}$$

其中右端第二项 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$ 是由于质点的相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 而引起的，也称为**附加项**。再将(1.53)和(1.54)式代入(1.52)式，即得点的**加速度合成公式**

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_e+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r\tag{1.55}$$

把上式右端第三项记作 $\boldsymbol{a}_c$，$\boldsymbol{a}_c=2\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$，称为**科里奥利加速度**；或称**附加加速度**；它等于动系角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 与动点相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 矢积的两倍。在下列三种情况下将不存在科里奥利加速度：

$$\boldsymbol{\omega}=0;\quad \boldsymbol{v}_r=0;\quad \boldsymbol{\omega}\parallel\boldsymbol{v}_r$$

由于存在科里奥利加速度，点的加速度合成公式要比速度合成公式复杂些。

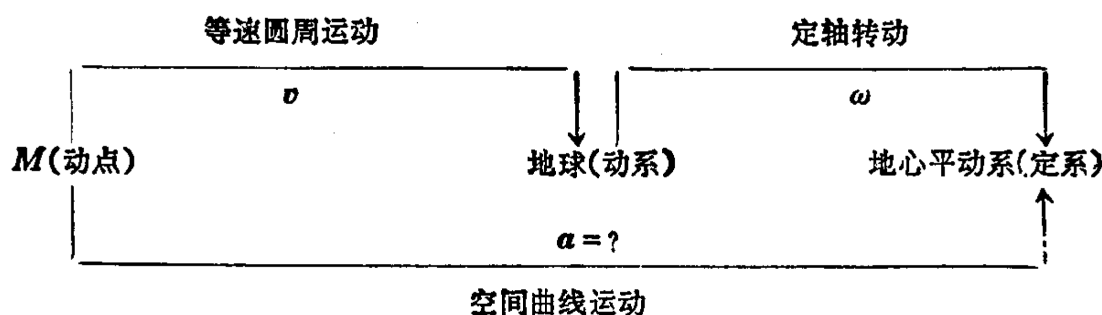
如记定系为甲，动系为乙，则加速度合成公式又可记为

$$_{甲}\boldsymbol{a}_M={}\boldsymbol{a}_{甲\overline{M}}+{}_{乙}\boldsymbol{a}_M+2{}_{甲}\boldsymbol{\omega}_{乙}\times{}_{乙}\boldsymbol{v}_M,\quad(\overline{M}\in乙)\tag{1.56}$$

例 1.16 如图 1-40 a 所示，在地球上北纬 λ 处有一动点 M，该点沿着经线向北以匀速 $\boldsymbol{v}$ 运动，考虑地球自转，求动点 M 的绝对加速度 $\boldsymbol{a}$。设地球半径为 R，地球自转角速度为 $\boldsymbol{\omega}$(大小为 7.29×10^{-5}/s)，

方向沿地轴(由南极指向北极)。

【解】 作框图如下：



由框图可写出任意时刻 M 点的 $\boldsymbol{a}_r$、$\boldsymbol{a}_e$ 和 $\boldsymbol{a}_c$ 的大小和方向(如图 a)为

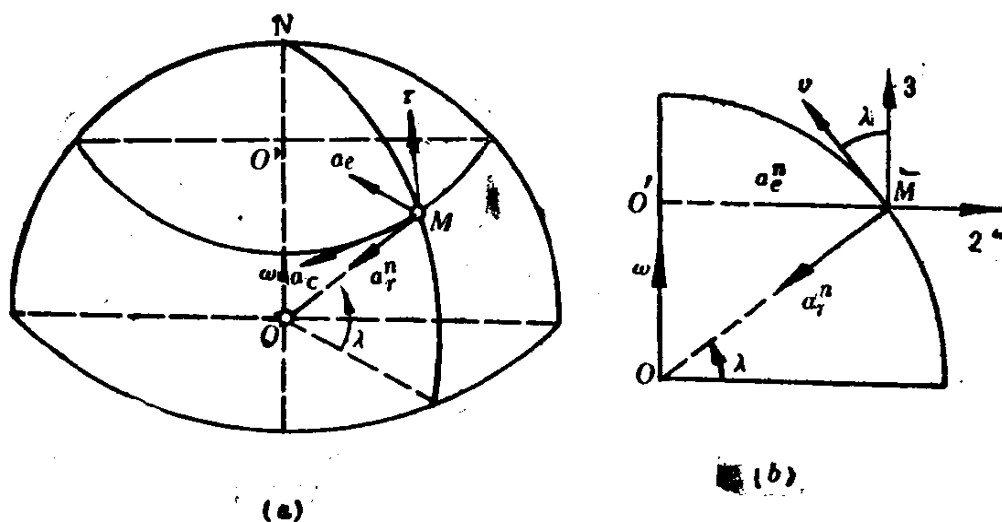


图 1-40

$$a_r=\frac{v^2}{R},\quad \text{指向地心}\ O\ \text{点}$$

$a_e=R\omega^2\cos\lambda$， 指向 O' 点，($\boldsymbol{a}_e=\boldsymbol{a}_{\overline{M}}$， $\overline{M}$ 在地球表面

$a_c=2\omega v\sin\lambda$， 垂直于过 M 点的子午面

建立地球固连系 $\overline{M}123$ 如图 b，$\overline{M}3$ 轴平行于地轴，$\overline{M}2$ 轴沿 $\overrightarrow{O'M}$，则由 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_c$ 得 $\boldsymbol{a}$ 在该系的投影式为：

$$\begin{cases} a_1=2\omega v\sin\lambda \\ a_2=-\left(\dfrac{v^2}{R}+R\omega^2\right)\cos\lambda \end{cases}$$

$$a_3 = -\frac{v^2}{R}\sin\lambda$$

所以

$$\boldsymbol{a} = a_1 \mathbf{1}^0 + a_2 \mathbf{2}^0 + a_3 \mathbf{3}^0$$

例 1.17 试求例 1.14 摇杆机构中滑块 M 的绝对加速度 $\boldsymbol{a}_M$。

【解】 M 点的牵连加速度 $\boldsymbol{a}_e$ 是摇杆 OA 上点 $\overline{M}$（该瞬时与 M 相重合的点）的加速度，即

$$\boldsymbol{a}_e = -\omega^2\sqrt{R^2-l^2}\,\boldsymbol{j}$$

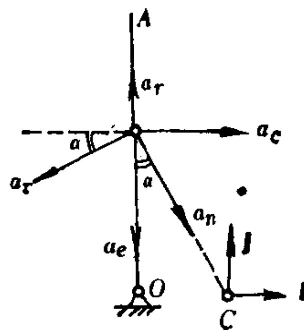


图 1-41

而 $\boldsymbol{a}_r = a_r\boldsymbol{j}$，其中 a_r 为未知。又因 M 点的绝对轨迹为圆槽，其法向加速度的大小为 $a_n = \omega^2 R$，方向指向圆心 C 点（图1-41），其切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau$ 如图如示，大小未知。而科里奥利加速度为 $\boldsymbol{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r = 2\omega^2 l\boldsymbol{i}$。于是由加速度合成公式 $\boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c$ 及图可得沿 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 方向的投影式为

$$\begin{cases} -a_\tau\cos\alpha + \omega^2 R\sin\alpha = 2\omega^2 l & (1)\\ -a_\tau\sin\alpha - \omega^2 R\cos\alpha = -\omega^2\sqrt{R^2-l^2} + a_r & (2)\end{cases}$$

由 (1) 式可得

$$a_\tau = -\frac{\omega^2 Rl}{\sqrt{R^2-l^2}}$$

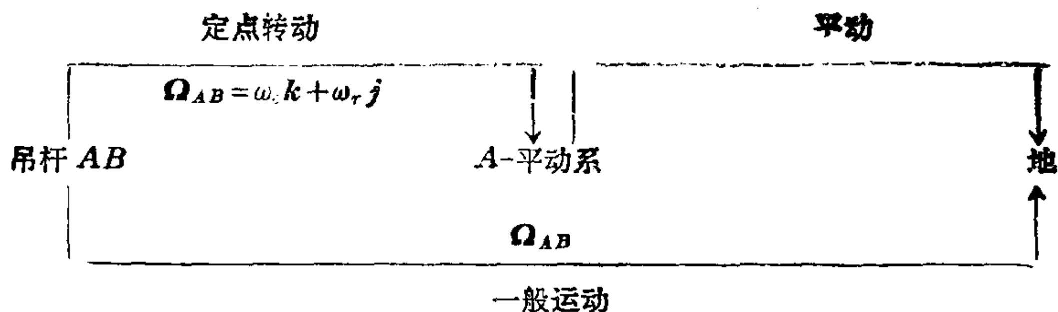
于是

$$a_M = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \frac{\omega^2 R^2}{\sqrt{R^2-l^2}} \tag{3}$$

4. 刚体的复合运动；角速度合成定理

上节讨论刚体一般运动的方法是把一般运动分解为随基点的平动和绕基点的定点转动，从而导得了基点法速度公式和加速度公式，但这样的分解方法并不是唯一的。

例如，图 1-42 所示的起重吊车，其吊杆 AB 作一般运动，取 A 为基点，建立框图如下：



但实际上 AB 杆的运动是由两种定轴转动合成的，即 AB 杆一方

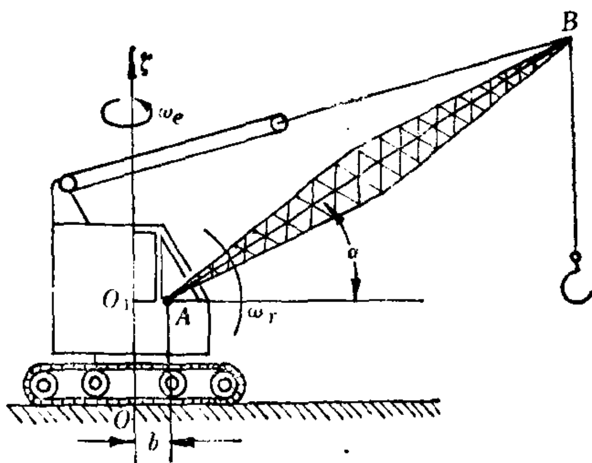
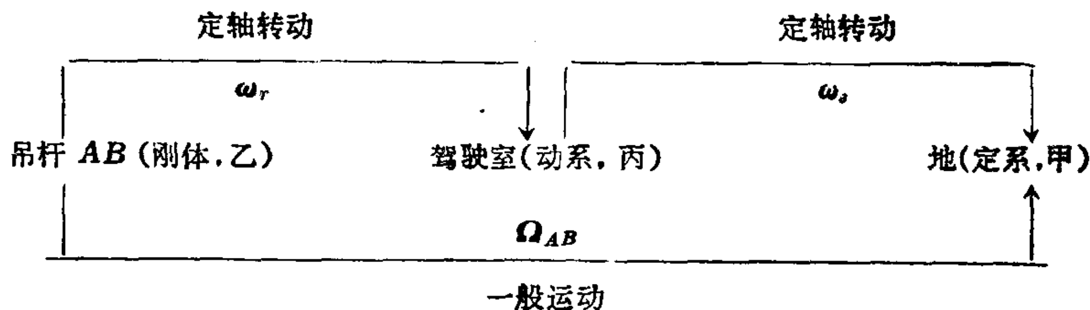


图 1-42

面随驾驶室一起绕竖直轴 $O\zeta$ 以角速度 ω_e 旋转，同时又在包含 AB 杆的竖直面内绕 A 轴以角速度 ω_r 转动，所以取驾驶室为动系，则刚体的相对运动和牵连运动都是定轴转动，其运动框图如下：



那么在这种分解下，刚体总角速度 $\boldsymbol{\Omega}_{AB}$ 与相对角速度 $\boldsymbol{\omega}_r$ 和牵连角速度 $\boldsymbol{\omega}_e$ 之间是否还成立 $\boldsymbol{\Omega}_{AB}=\boldsymbol{\omega}_e+\boldsymbol{\omega}_r$ 呢？角速度合成定理给出了肯定的回答。

角速度合成定理 设参考系乙(可以是某刚体)相对于参考系甲作一般运动,其角速度为 $_{甲}\omega_{乙}$,今有中间参考系丙,丙系相对于甲系作一般运动,其角速度为 $_{甲}\omega_{丙}$, 而乙系相对于丙系运动(可是一般运动)的角速度为 $_{丙}\omega_{乙}$, 则乙系相对于甲系运动的绝对角速度 $_{甲}\omega_{乙}$ ($=\boldsymbol{\omega}_a$) 是牵连角速度 $_{甲}\omega_{丙}$ ($=\boldsymbol{\omega}_e$) 与相对角速度 $_{丙}\omega_{乙}$ ($=\boldsymbol{\omega}_r$) 的矢量和,即

$$_{甲}\boldsymbol{\omega}_{乙}={}_{甲}\boldsymbol{\omega}_{丙}+{}_{丙}\boldsymbol{\omega}_{乙} \tag{1.57}$$

或者记成

$$\boldsymbol{\omega}_a=\boldsymbol{\omega}_e+\boldsymbol{\omega}_r \tag{1.58}$$

为了证明(1.57)式,设 $\boldsymbol{B}$ 为固连于乙系的任一矢量,显然有 $\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\right)_{乙}=0$。先取乙为动系,由相对导数公式可得:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\right)_{甲}={}_{甲}\boldsymbol{\omega}_{乙}\times\boldsymbol{B}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\right)_{丙}={}_{丙}\boldsymbol{\omega}_{乙}\times\boldsymbol{B}$$

再取丙为动系,则有

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\right)_{甲}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\right)_{丙}+{}_{甲}\boldsymbol{\omega}_{丙}\times\boldsymbol{B}$$

由以上三式可得

$$_{甲}\boldsymbol{\omega}_{乙}\times\boldsymbol{B}={}_{丙}\boldsymbol{\omega}_{乙}\times\boldsymbol{B}+{}_{甲}\boldsymbol{\omega}_{丙}\times\boldsymbol{B}$$

即

$$({}_{甲}\boldsymbol{\omega}_{乙}-{}_{甲}\boldsymbol{\omega}_{丙}-{}_{丙}\boldsymbol{\omega}_{乙})\times\boldsymbol{B}=0$$

因矢量 $\boldsymbol{B}$ 是任意的,所以(1.57)式成立。 证毕

根据相对导数的公式,还可由(1.57)式求得复合运动刚体的角加速度合成公式。

将(1.57)式两端求绝对导数,用 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 代表角加速度,并应用(1.46)式则有:

$$\begin{aligned}{}_{甲}\boldsymbol{\varepsilon}_{乙}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}_{甲}\boldsymbol{\omega}_{乙})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}_{甲}\boldsymbol{\omega}_{丙})+\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}_{丙}\boldsymbol{\omega}_{乙})\right]_{甲}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}_{甲}\boldsymbol{\omega}_{丙})+\left[\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}({}_{丙}\boldsymbol{\omega}_{乙})\right]_{丙}+{}_{甲}\boldsymbol{\omega}_{丙}\times{}_{丙}\boldsymbol{\omega}_{乙}\end{aligned}$$

于是得到复合运动刚体的**角加速度合成公式**：

$$ {}_{\text{甲}}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{乙}} = {}_{\text{甲}}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{丙}} + {}_{\text{丙}}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{乙}} + {}_{\text{甲}}\boldsymbol{\omega}_{\text{丙}} \times {}_{\text{丙}}\ {}_{\text{乙}} \tag{1.59} $$

或者记成

$$ \boldsymbol{\varepsilon}_a = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_r + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{\omega}_r \tag{1.60} $$

这样，我们掌握了点和刚体复合运动的概念以及有关公式后，一些复杂的运动学问题也就可以解决了。下面举例说明。

例 1.18 图 1-43 a 为大型游艺机“兜得欢”（又称旋转木马）的简图，图b 是局部机构的放大。

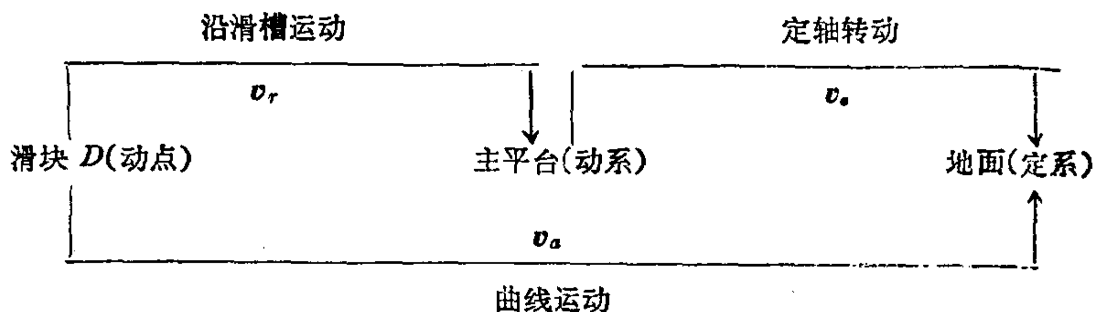
设主平台的转动角速度为 ω_1，其转轴通过 45° 的斜齿轮与曲轴 B 连接；木马固连于 AD 杆，其 D 端的滑块可在直槽（与主平台固连）中滑动，而其 A 端由曲轴 B 带动。

设锥齿轮的两个节圆的半径分别为 r_1 和 r_2；$\overline{AB}=r$；$\overline{AD}=R$，试求当曲轴转角为 θ_0 时，滑块 D 相对于主平台的速度 $\boldsymbol{v}_r$ 和相对于地面的速度 $\boldsymbol{v}_a$ 以及该瞬时木马（即 AD 杆）相对于主平台的角速度 $\boldsymbol{\omega}_r$ 和相对于地面的角速度 $\boldsymbol{\omega}_a$。

【解】 我们用点的复合运动公式求 D 点的速度，再用刚体复合运动公式来求木马的角速度。

根据题意，取地面为定系，取主平台为动系，在其上建立的固连系 xyz 如图 a 所示，设其单位矢量分别为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$。

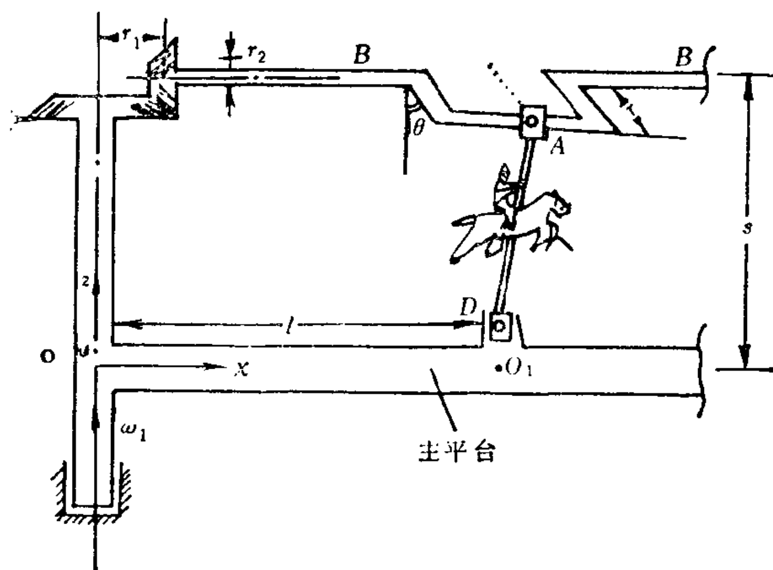
现取滑块 D 为动点，其复合运动的框图如下：



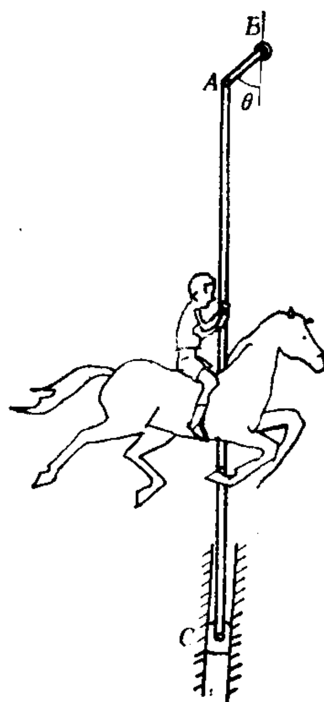
由题设易知

$$ \boldsymbol{v}_e = l\omega_1 \boldsymbol{j} \tag{1} $$

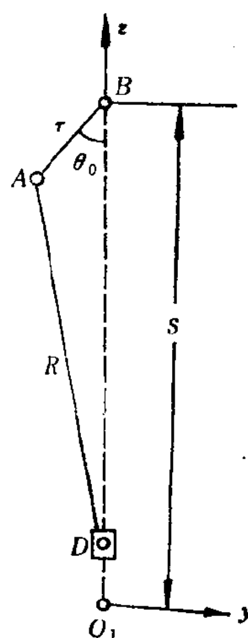
为了求出 $\boldsymbol{v}_r$，只要考虑曲柄连杆机构 BAD 中滑块 D 的速度，见图 c。



(a)



(b)



(c)

图 1-43

根据斜齿轮的传动比，求得 AB 杆（即曲轴 B）相对于主平台的角速度 ω_2 为

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1$$

所以

$$\boldsymbol{\omega}_2=\frac{r_1}{r_2}\omega_1\boldsymbol{i} \tag{2}$$

在时刻 t，D 点的位移是

$$z_D=s-(r\cos\theta+R\cos\varphi)=s-\left(r\cos\theta+R\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}\sin^2\theta}\right)$$

注意到

$$\theta(t)=\omega_2 t=\frac{r_1}{r_2}\omega_1 t,\qquad \dot{\theta}(t)=\frac{r_1}{r_2}\omega_1$$

则

$$v_r=\dot{z}_D(\theta_0)=\frac{r_1}{r_2}r\omega_1\sin\theta_0+\frac{r_1 r^2}{2r_2R\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}\sin^2\theta_0}}\sin 2\theta_0$$

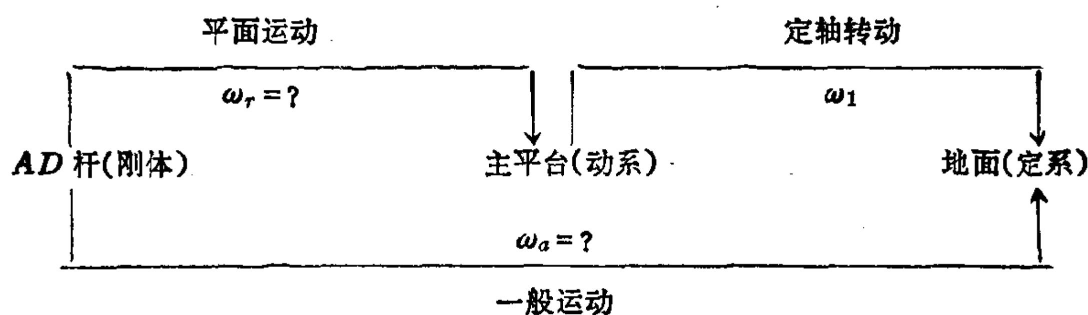
即

$$\boldsymbol{v}_r=\frac{r_1}{r_2}r\omega_1\sin\theta_0\left(1+\frac{r\cos\theta_0}{\sqrt{R^2-r^2\sin^2\theta_0}}\right)\boldsymbol{k} \tag{3}$$

由此可得滑块 D 的绝对速度为

$$\boldsymbol{v}_D(\theta_0)=\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r=l\omega_1\boldsymbol{j}+\boldsymbol{v}_r \tag{4}$$

为了求 AD 杆的角速度，将其看成作复合运动的刚体，建立其运动框图如下：



已知

$$\boldsymbol{\omega}_e=\omega_1\boldsymbol{k} \tag{5}$$

而 AB 杆的相对角速度就是曲柄连杆机构(图 c)中的 $\dot{\varphi}$。

因为

$$r \sin\theta = R \sin\varphi$$

所以

$$\dot{\varphi} = \frac{r}{R}\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}\omega_2$$

即

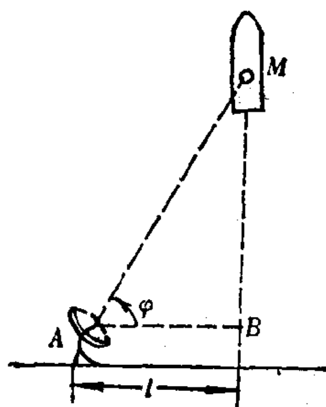
$$\boldsymbol{\omega}_r = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(\theta_0) = \frac{r_1}{r_2}\frac{r\cos\theta_0}{\sqrt{R^2 - r^2\sin^2\theta_0}}\omega_1\boldsymbol{i} \tag{6}$$

则

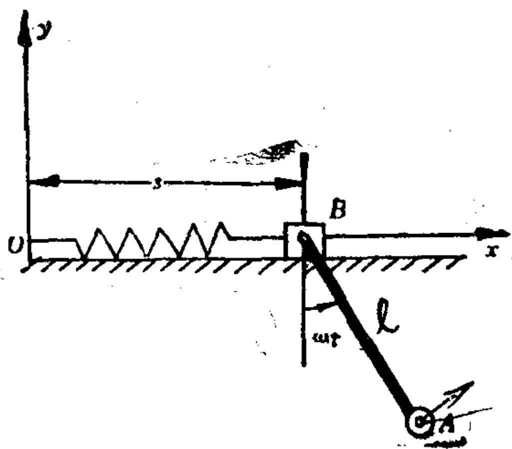
$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_r = \frac{r_1}{r_2}\frac{r\cos\theta_0}{\sqrt{R^2 - r^2\sin^2\theta_0}}\omega_1\boldsymbol{i} + \omega_1\boldsymbol{k} \tag{7}$$

习　题

1-1　从发射场 B 垂直向上发射一枚火箭 M，在距 B 为 l 处的 A 点用雷达对火箭进行追踪，如图所示，若 $\varphi = \varphi(t)$ 为已知，试求火箭的速度及加速度的大小。



题 1-1 图

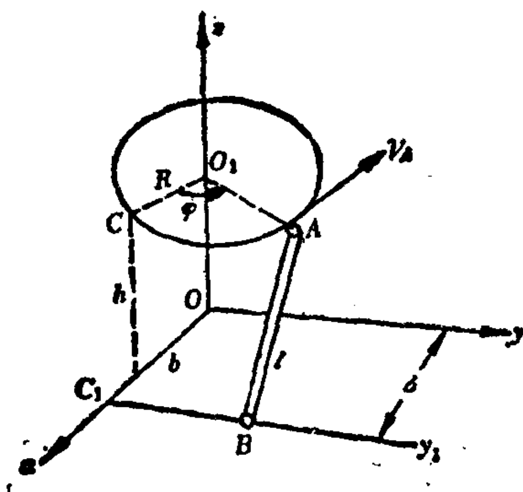


题 1-2 图

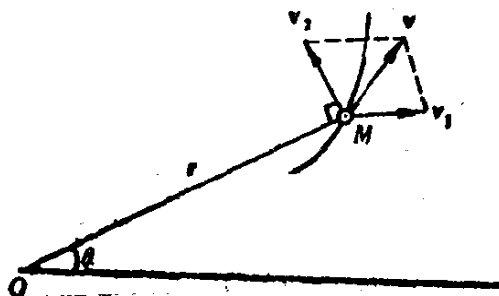
1-2　图示为一椭圆摆。杆 AB 长为 l，且以等角速 ω 绕铰 B 转动，而滑块 B 沿水平直线作谐振动：$s = a + b\sin\omega t$，其中 a、b 为常数，求摆锤 A 的轨迹。

1-3　A、B 两点用一杆相连，A 点在平行于 Oxy 的平面内作圆周运动(圆心 O_1 在 z 轴上，半径为 R)，B 点则沿着平行于 Oy 轴的直线 C_1y_1 滑动。已知 $OO_1 = h$，$OC_1 = b$，$\overline{AB} = l$，A 点的速率为 v_A，试求

B 点的速率v_B与 φ 角的关系式(O_1C 与 x 轴平行,见图示)。

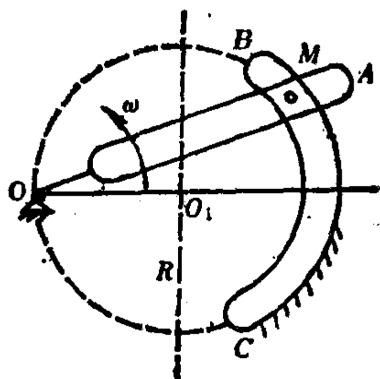


题 1-3 图



题 1-4 图

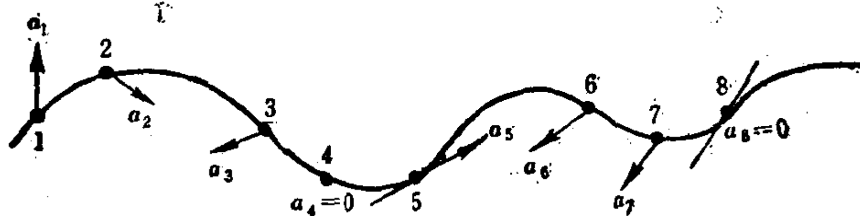
1-4 M 点作平面曲线运动,其速度由两个分量组成,其中 v_1 平行于某一固定直线,而v_2沿着 M 点的横向(与 OM 相垂直),其中 O 为固定点,v_1、v_2为常数。试证明 M 点的轨迹是以O为焦点的二次曲线,并分别讨论 $v_1>v_2$,$v_1=v_2$,$v_1<v_2$ 时的情形。



题 1-5 图

1-5 图示摇杆滑道机构中的滑块 M 同时在固定圆弧槽 $\overset{\frown}{BC}$(半径为 R)和杆 OA 的滑道中滑动。设摇杆绕 O 轴以等角速 ω 转动,初始时摇杆在水平位置。试分别用坐标法和自然法给出 M 点的运动规律及速度、加速度的表达式。

1-6 点沿图示平面曲线运动,试说明下图所示各点处的加速度哪些是可能实现的,哪些是不可能实现的,对可能实现的点,还要指出是加速运动还是

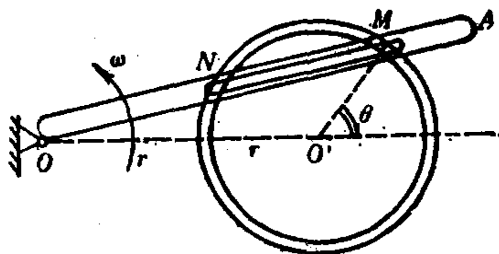


题 1-6 图

减速运动。（注：$\boldsymbol{a}_6$ 沿第 5 点的切向，第 6 点在直线段上，第 7 点为最低点，第 8 点为拐点）。

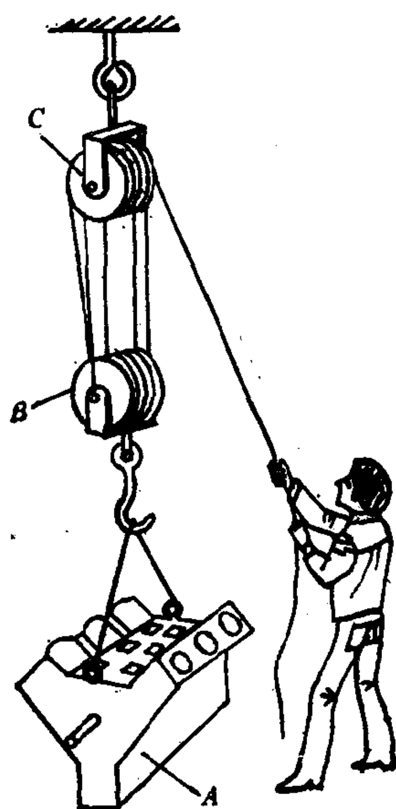
1-7 一点沿半径为 R 的圆周按 $s=v_0t-ct^2/2$ 的规律运动。问此点加速度的大小等于多少？又问当 t 等于多少时加速度的大小等于 c，此时该点一共已走了多少圈？

1-8 一半径为 r 的圆 O' 与直线 OA 相交于 M、N 两点，如图所示，$OO'=2r$。今 OA 以均角速 ω 绕 O 点转动。求当 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 弧度时 M 点的速度与加速度。

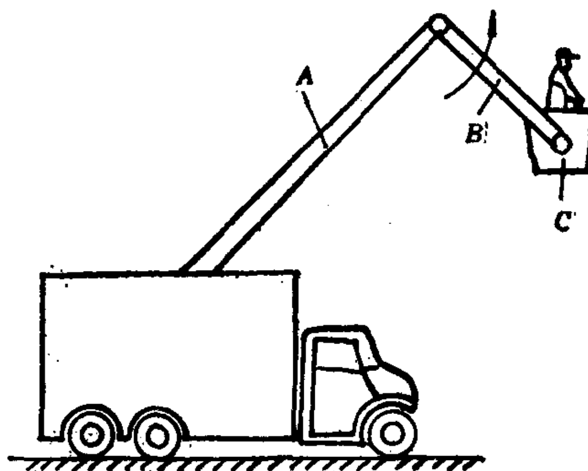


题 1-8 图

1-9 试说明下列各平面系统中，每个部件（A、B、C…）的运动类型。

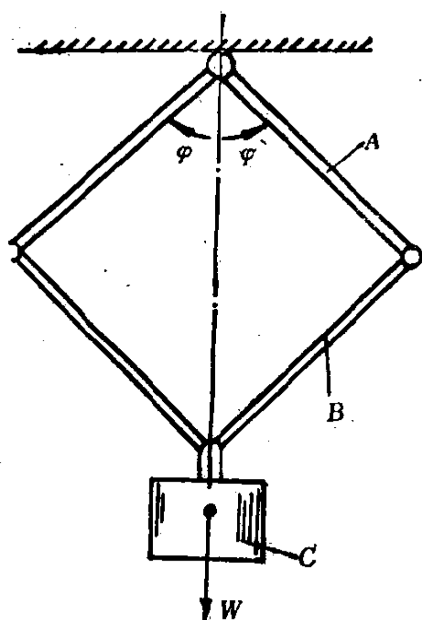


(a)

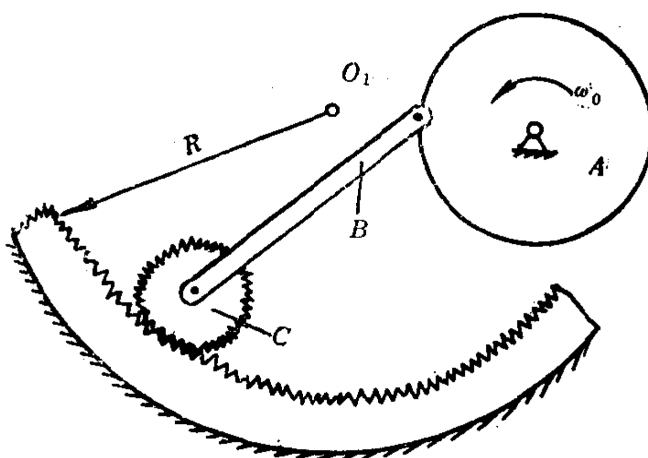


(b)

题 1-9 图

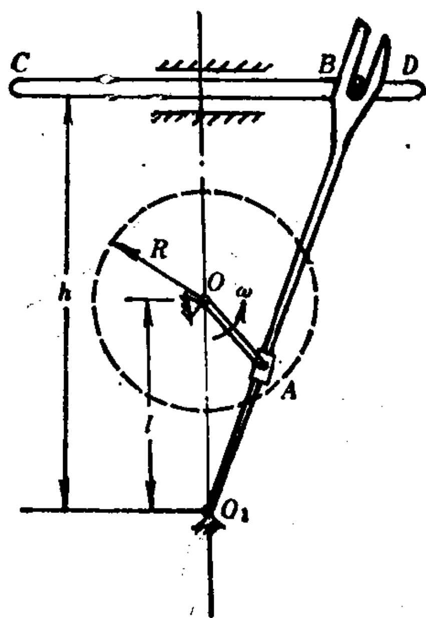


(c)



(d)

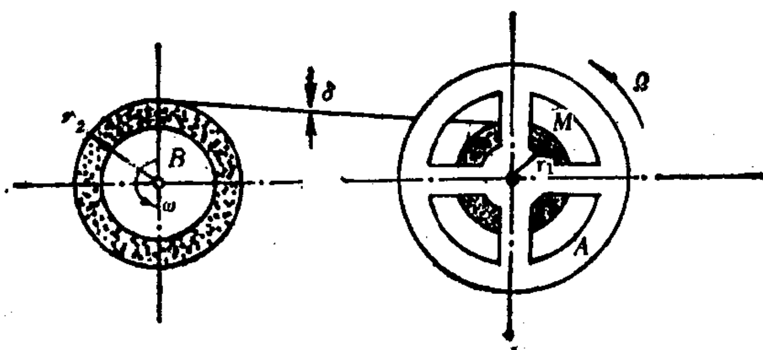
题 1-9 图



题 1-10 图

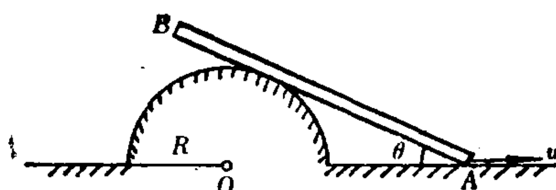
1-10 图示为一牛头刨床机构。当曲柄 OA 绕 O 轴转动时，通过滑块 A 带动摇杆 O_1B 绕 O_1 轴往复摆动；同时，通过销子 B 带动滑枕 CD 来回运动。设 $R=20\,\text{cm}$，$l=40\,\text{cm}$，$h=80\,\text{cm}$，$\omega=5\,\text{sec}^{-1}$，试求滑枕 CD 的最大速度。

1-11 图示塑料带传送机构，可把塑料带从轮 A 滚到轮 B 上，轮 B 保持常转速 $n=25\,\text{r/min}$。设塑料带的厚度为 $\delta=0.5\,\text{cm}$，在某瞬时 t_0，测得 $r_2(t_0)=60\,\text{cm}$，$r_1(t_0)=50\,\text{cm}$（见图），求该瞬时轮 A 的角速度 $\Omega(t_0)$ 和角加速度 $\varepsilon(t_0)$，还要求塑料带上 M 点（塑料带圈边缘上的点，见图）在该瞬时加速度的径向分量 $\boldsymbol{a}_r(t_0)$ 和横向分量 $\boldsymbol{a}_\varphi(t_0)$。设塑料带是不可伸长的。

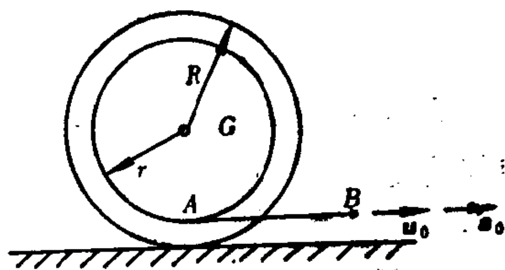


题 1-11 图

1-12 AB 杆的 A 端沿水平直线以等速率 u 运动，且运动中杆子恒与半径为 R 的半圆相切，如图示。求夹角为 θ 时，杆子的角速度 $\boldsymbol{\omega}$。



题 1-12 图

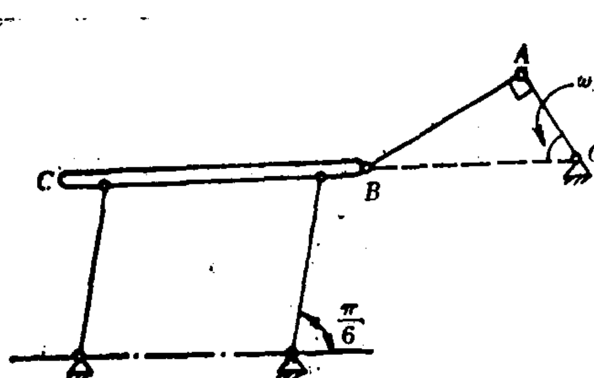


题 1-13 图

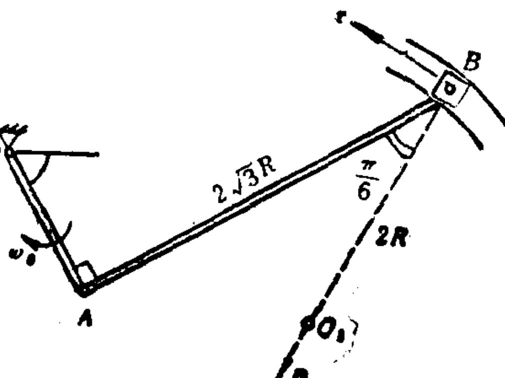
1-13 绕线轮沿水平面滚动而不滑动，轮半径为 R。在轮上有圆柱部分，其半径为 r。将线绕在圆柱上，设在瞬时 t_0，已知线的 B 端以速度 $\boldsymbol{u}_0$ 和加速度 $\boldsymbol{a}_0$ 沿水平方向运动，求绕线轮轴心 G 点在该瞬时的速度 $\boldsymbol{v}_G$ 和加速度 $\boldsymbol{a}_G$。

1-14 图示为筛子机构，筛子 BC 的摆动由连杆机构带动。已知曲柄 OA 的转速为 $n=40\,\mathrm{r/min}$，OA 长为 30 cm，当筛子 BC 运动到与点 O 在同一水平线上时，$\angle BAO=\frac{\pi}{2}$，求此瞬时筛子的速度（大小和方向）。

1-15 在曲柄连杆机构中，曲柄 OA 绕 O 轴转动，在某瞬时，其角速度为 ω_0，角加速度为 ε_0，而且连杆 AB 与曲柄 OA 垂直，滑块 B 在圆形槽内滑动，此时半径 O_1B 与连杆的交角为 $\frac{\pi}{6}$。如 $\overline{OA}=R$，



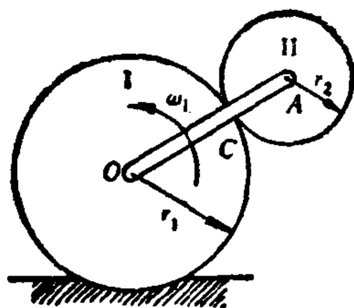
题 1-14 图



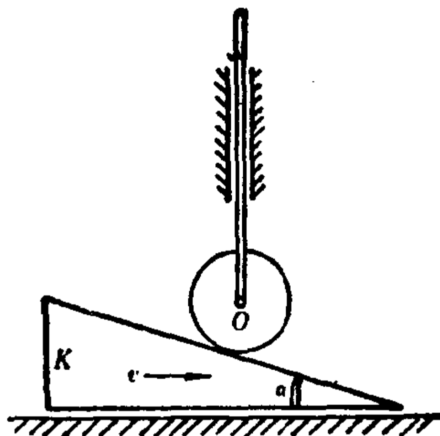
题 1-15 图

$\overline{AB}=2\sqrt{3}R$，$\overline{O_1B}=2R$，求在该瞬时，滑块 B 的切向和法向加速度的值 a_B^τ、a_B^n。

1-16　图示为外啮合机构，动齿轮 A 由曲柄 OA 带动，在定齿轮 O 上作纯滚动。已知两齿轮的半径分别为 r_1、r_2 及曲柄在某瞬时的角速度为 ω_1（角加速度未知），试求轮 A 在该瞬时的角速度 ω_2 及瞬心 C 的加速度。



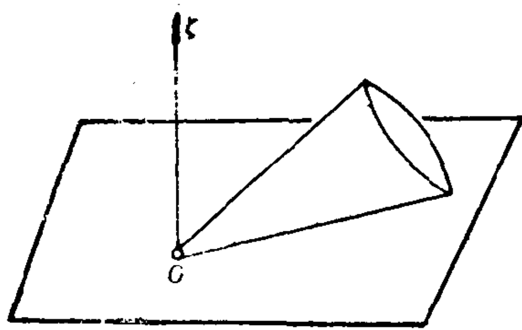
题 1-16 图



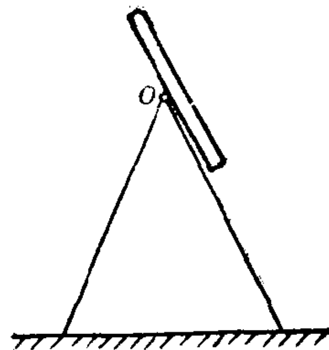
题 1-17 图

1-17　三角块 K 以匀速 $v=12$(cm/s) 沿水平方向向右移动，从而带动圆轮并使其轴 O 沿铅垂方向运动。设 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，圆轮的半径为 4 cm，圆轮与三角块之间无相对滑动。试求 O 点的速度和圆轮的角速度。

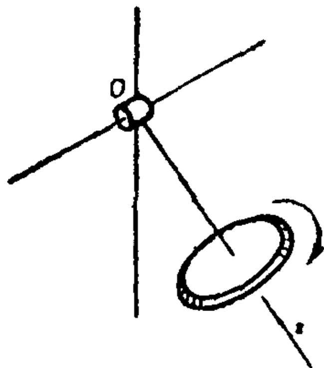
1-18　试说明下列各系统中哪个刚体作定点转动？并指出其定点 O、固定轴 $O\zeta$、固连轴 Oz、节线轴 ON，以及章动角 θ。



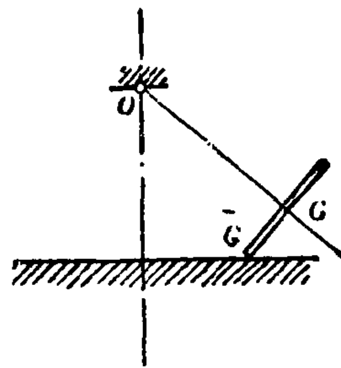
(1) 圆锥绕顶点在水平面上只滚不滑



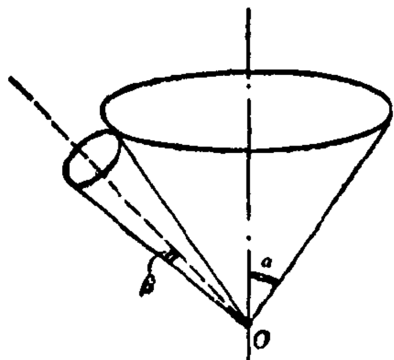
(2) 圆盘在定锥面上只滚不滑（盘心固定）



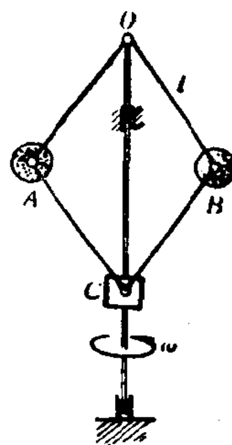
(3) 绕对称轴转动的圆盘同时绕垂直于纸面的O轴摆动



(4) 盘心G与定点O用刚杆固连，盘在水平面上纯滚动



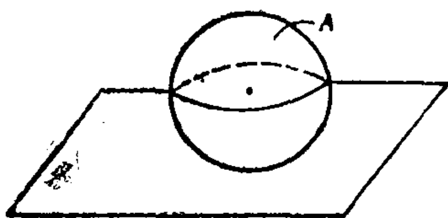
(5) 动圆锥在定圆锥外表面只滚不滑



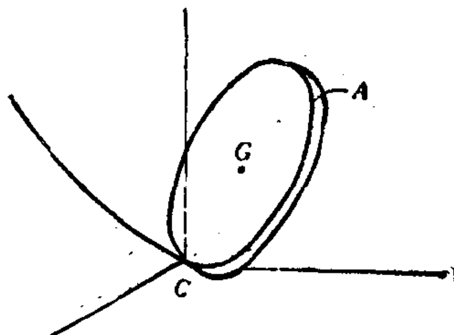
(6) 离心调速器

题 1-18 图

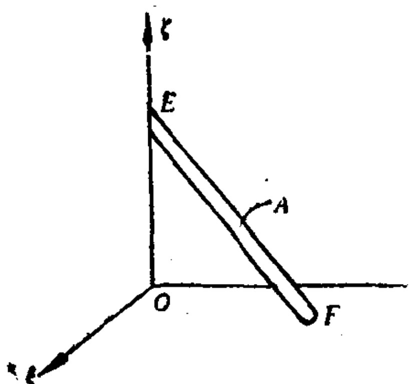
1-19 按照刚体运动的分类，说明下列系统中的刚体 A 作什么运动？



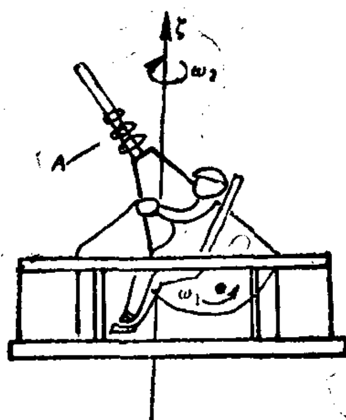
(1) 圆球 A在水平面上纯滚动



(2) 硬币A在水平面上纯滚动



(3) 杆 A、E端沿竖直线滑动．F端在水平面上滑动



(4) 高射炮 A、坐盘绕竖直轴以ω_2转动．炮筒又可绕 O 点在竖直面内以ω_1转动

题 1-19 图

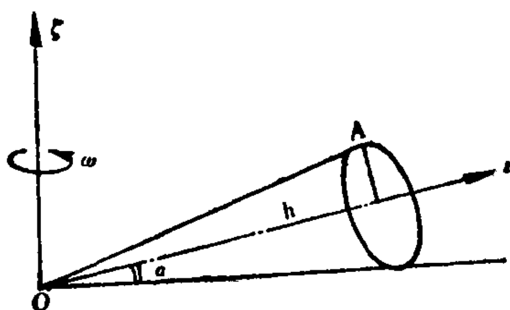
1-20　试用投影法导出在定系 $O\xi\eta\zeta$ 中的欧拉运动学方程式(1.36)。

1-21　刚体作定点转动时，其欧拉角的变化规律为：自转角 $\varphi=nt$，进动角 $\psi=\frac{\pi}{2}+knt$，章动角 $\theta=\frac{\pi}{3}$，其中 n、k 为常数，试求刚体的角速度和角加速度在固定系 $O\xi\eta\zeta$ 中的投影式。

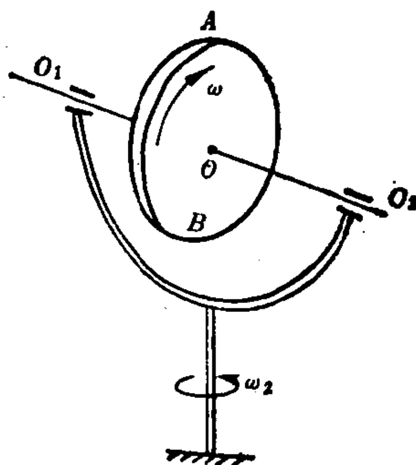
1-22　证明在规则进动中，即当欧拉角可表示成 $\psi=mt$，$\varphi=nt$，$\theta=c$ (m、n、c 均为常数)时，物体的角加速度在固连系 $Oxyz$ 上的投影式为：$\varepsilon_x=mn\sin c\cdot\cos nt$，$\varepsilon_y=-mn\sin c\cdot\sin nt$，$\varepsilon_z=0$

1-23　一个高为 h、半顶角为 α 的正圆锥以其顶点 O 为固定点在

平面上作纯滚动，已知圆锥中心线 Oz 以等角速 ω 绕竖直轴 $O\zeta$ 转动，试求圆锥面上高点 A 的加速度值a_A。



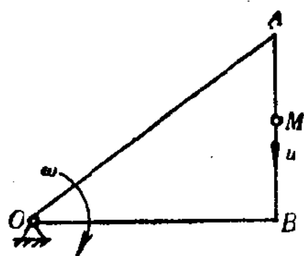
题 1-23 图



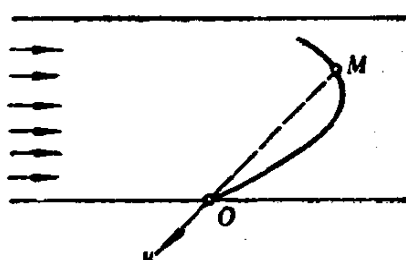
题 1-24 题

1-24 图示半径为 r 的圆盘以常角速度 ω_1 绕过盘心的水平轴 $\overline{O_1O_2}$ 转动，而 O_1O_2 轴又以常角速度 ω_2 绕竖直轴转动。求圆盘边缘最高点 A 及最低点 B 的速度和加速度的大小。

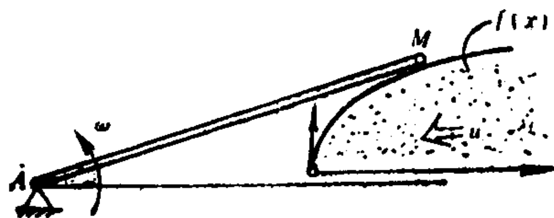
1-25 设下列各题中的 M 点作复合运动，试列出其框图。



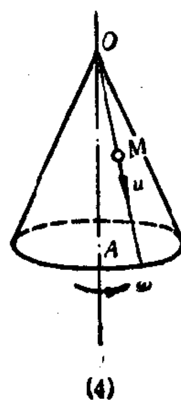
(1)



(3)



(2)



(4)

题 1-25 图

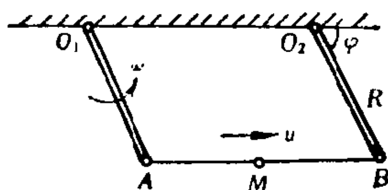
（1）见图1，一直角三角形OBA在其自身平面内以等角速ω绕其顶点O转动，质点M以常速率u沿AB边运动。

（2）凸轮以等速率u自右向左移动（见图2）。在固连于凸轮的坐标系Oxy中，凸轮外形的方程为$y=f(x)$。直杆AM长为l。其一端铰接于固定点A，另一端M则搁在凸轮上。

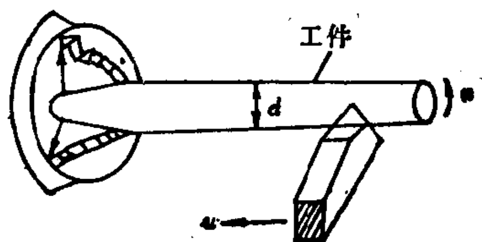
（3）见图3，一小船M被水冲走后，在岸边固定点O用一绳子把船拉回岸边。设河水以均速率v流动，岸边收绳子的速率为常数u。

（4）见图4，M点以等速率u沿圆锥母线运动，此圆锥又以等角速ω绕其轴线OA转动。

1-26　图示平面铰接平行四边形机构O_1ABO_2，长度为R的O_1A杆以等角速ω绕O_1轴转动。今有一小虫M沿AB杆以等速u（相对于杆）爬行。试求：当$\varphi=\frac{\pi}{3}$时，小虫M的绝对速度$\boldsymbol{v}$和绝对加速度$\boldsymbol{a}$。



题1-26图



题1-27图

1-27　如图所示，车床主轴的转速为$n=30\text{r/min}$，工件的直径$d=4\text{cm}$。如车刀的横向走刀速度为$u=1\text{cm/s}$，求车刀相对于工件的相对速度。

1-28　设河水流速各处均为v_1，河中一船以大小不变的相对速度v_2朝岸上固定点O划进，试求船的轨迹。又若$v_1=v_2$，则轨迹是什么曲线。

1-29　有一宽度为l的河流，某处河水的流速与该处到岸边的距离成正比，在河岸处水流速度为零，在河流中心处则为v，今有一小船以相对速率u沿垂直于水流的方向行驶。试求小船的轨迹以及船在对岸靠

扰的地点。

1-30 直线 AOB 在平面上，一半径为 R 的圆在该平面内以等角速 ω 绕圆周上的 O 点转动。圆周与直线的另一交点为 M。试求：

（1）M 点相对于直线 AB 的速度和加速度。

（2）M 点相对于圆周的速度和加速度。

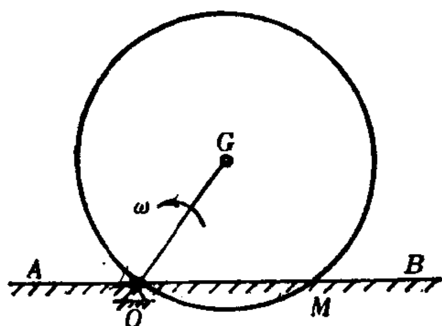
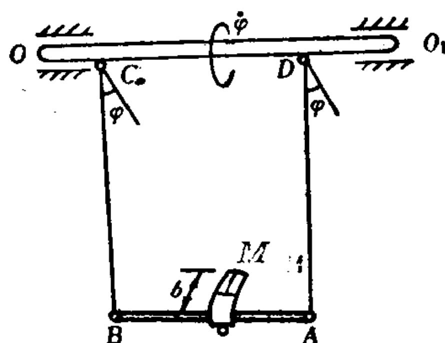


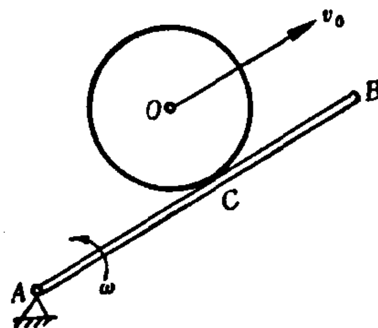
图 1-30 题



题 1-31 图

1-31 秋千 $ABCD$ 按规律 $\varphi=\varphi_0\sin\omega t$ 绕水平轴 OO_1 摆动。杂技演员在横木 AB 上以常角速 ω 相对于 AB 旋转。已知，$\overline{BC}=\overline{AD}=l$，且当 $t=\dfrac{\pi}{\omega}$ 时，代表演员脚底的 M 点到 AB 的距离为 b，求该瞬时 M 点的绝对加速度值 a_M。设开始时，运动员处于铅垂位置，头向上，且 AB 杆在最低位置。

1-32 半径为 R 的圆盘沿导轨 AB 无滑动地滚动，而 AB 又以匀角速度 ω 在铅垂平面内转动，如果圆盘中心 O 的相对速率是常数 v_0，求在时刻 t，圆盘边缘与导轨 AB 的接触点 C 的速度 $\boldsymbol{v}_C$ 和加速度 $\boldsymbol{a}_C$（见图）。设初始时圆盘和 AB 的接触点与 A 点相重合。



题 1-32 图

第二章 静 力 学

静力学是力学中发展较早的一部分，它是研究物体(或物体系)在力系作用下的平衡规律。在静力学中所谓物体的**平衡**，通常是指它相对于某个参考体(常常指地球)保持静止的状态。而力系的平衡就是指本来在地球上静止的物体在附加上该力系后仍然保持静止，所谓**力系**就是指作用于同一物体上力的全体。

静力学在机械、航空等工程技术中是受力分析的基础,在生产实践中有着广泛的应用。

力系的平衡条件是对构件、结构和机械零件等进行静力计算的基础,在设计建筑物的构件、工程结构和作匀速运动的机械零件时,需要先分析物体的受力情况,再应用平衡条件计算所受的未知力,最后按照材料的性能确定几何尺寸或选择适当的材料。

按照叙述的方法,静力学可分为几何静力学和分析静力学两种,前者用作图或几何的方法着重对刚体进行讨论，而后者用数学分析的方法可对任意质点系进行讨论。

本章对几何静力学作简要的讨论，重点是物体的受力分析和平衡方程。分析静力学将在第四章中讨论。

§2.1 静力学的基本概念

1. 力、力系及其等效性

力的概念是人们在实践中形成的。在自然科学中，力是指物体间的相互作用,这种作用使物体的运动状态发生改变,或者使物体发生变形。在刚体静力学中就不考虑物体的变形。

确定一个力要有三个要素,即力的大小、方向(包括方位和指向)和作用点。实践证明,物体上具有同一作用点的两个力可按照平行四边形

法则进行合成。因此力是一个矢量，可以记作 $\boldsymbol{F}$，假如再以作用点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 来表示力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点位置，则两个矢量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 一起，就完全确定了一个力。实践经验还表明，作用于刚体上的力可沿着作用线移动而不改变其对于刚体的运动效应，这种性质称之为**力的可传性**。

力矩描述了一个力改变物体转动状态的能力。常可分力对某点的力矩和力对某轴线的力矩两类。设刚体上作用着力 $\boldsymbol{F}$，其作用点为M，我们把力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点的力矩(图 2-1)定义为矢径 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 与力 $\boldsymbol{F}$ 的**矢积**，记作 $\boldsymbol{L}_O$，而 O 点称为**矩心**。则有

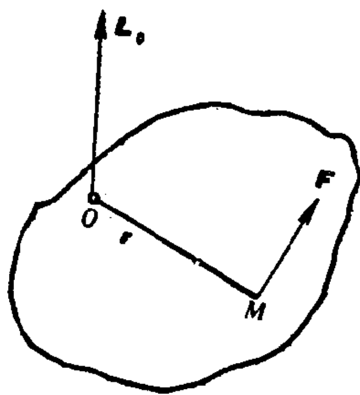


图 2-1

$$\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{2.1}$$

所以力矩也是一个矢量，它垂直于由 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 所决定的平面，其方向由右手螺旋法则确定。它的大小是力的大小 F 与从 O 点到力的作用线的垂直距离 d（图中未画出）的乘积。因为 $|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}|$ 是由 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 所组成的平行四边形的面积，若取 F 为底边，则 d 就是相应的高了，所以

$$|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}|=F\cdot d$$

我们还可定义力对于某根轴的力矩。力对于任意轴的力矩就是力对这一轴上任意一点的力矩在此轴上的投影，它是个标量。设力$\boldsymbol{F}$ 作用在M 点，p 是任意一根轴，$\boldsymbol{p}^0$ 是该轴的单位矢量，在 p 轴上任取一点 O，则力 $\boldsymbol{F}$ 对 p 轴的力矩是

$$l_p=\boldsymbol{L}_O\cdot\boldsymbol{p}^0=(\overrightarrow{OM}\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{p}^0 \tag{2.2}$$

考察一种特殊的力系，该力系中各个力均作用在同一点上，这种力系就称为**共点力系**。设共点力系（$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$）的作用点为 M，则可按照平行四边形法则（图 2-2），先把 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 合成一个力，作用点仍为 M，然后再与 $\boldsymbol{F}_3$ 合成，……，直至与 $\boldsymbol{F}_n$ 合成一个力 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$，它的作用点仍在 M。因此 $\boldsymbol{F}$ 也是一个力，称为该力系的**合力**。实践表明，如果我们把共点力系和它的合力看成是作用在该物

体上的两个力系，则这两个力系对物体的力学效果(保持平衡或运动状态的改变)是相同的，因此我们称共点力系和它的合力是等效力系。显然，合力较共点力系更为简单。

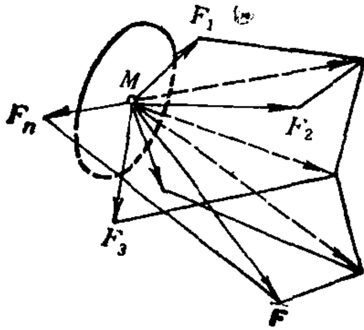


图 2-2

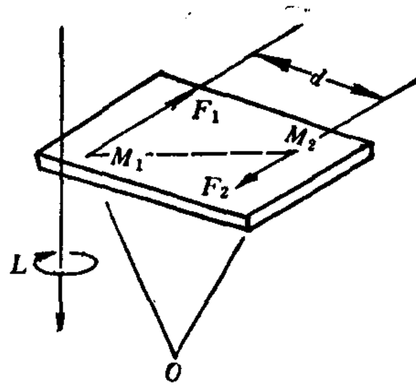


图 2-3

再考察一种力系，它是由两个大小相等、方向相反，但不在同一直线上的一对力所组成，这种力系称为**力偶**。设（$\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$）是力偶（图 2-3)，即 $\boldsymbol{F}_1=-\boldsymbol{F}_2$，则这两个力的矢量和(不是合力!)为零，而力偶对任一点 O 的合力矩为

$$\boldsymbol{L}_O=\overrightarrow{OM}_1\times\boldsymbol{F}_1+\overrightarrow{OM}_2\times\boldsymbol{F}_2=\overrightarrow{M_1M}_2\times\boldsymbol{F}_2$$

它与 O 点无关，所以把它称为**力偶矩**，记作 $\boldsymbol{L}$，则 $|\boldsymbol{L}|=Fd$，其中F是力的大小 ($F=|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|$)，$d$ 是两作用线间的距离(图 2-3)，而 $\boldsymbol{L}$ 的方向垂直于两作用线所决定的平面，其指向由右手螺旋法则决定。可见力偶只有两个要素，即力偶矩的大小和方向。

现在考虑作用在物体上的任意力系（$\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$），它们的作用点可以是各不相同的，设分别为 ($M_1,M_2,\cdots,M_n$)，这时我们可定义两个量。一个叫**主矢**，即力系中各个力的矢量和，记作 $\boldsymbol{R}$，即

$$\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \tag{2.3}$$

它没有作用点，所以不是力。另一个量叫主矩，即先取某点 O 为矩心，力系中各个力的作用点对 O 点的矢径记为 ($\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n$)，则我们把每个力对 O 点之矩的矢量和称为此力系对矩心 O 的**主矩**，记作 $\boldsymbol{L}_O$，即

$$L_O=\sum_{i=1}^{n} r_i \times F_i \tag{2.4}$$

主矢和主矩是度量力系效应的两个特征量。

根据主矩的定义，L_O 的大小和方向依赖于矩心 O 点的选择。例如对同一个力系（$F_1, F_2, \cdots, F_n$），取 O 与 A 为矩心(图 2-4) 分别计算其主矩为

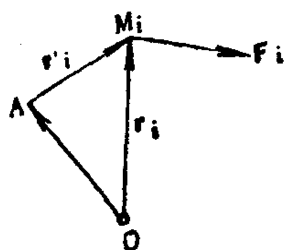


图 2-4

$$L_A=\sum_{i=1}^{n} r_i' \times F_i$$

$$L_O=\sum_{i=1}^{n} r_i \times F_i = \sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{OA}+r_i') \times F_i$$
$$=\overrightarrow{OA} \times \sum_{i=1}^{n} F_i + \sum_{i=1}^{n} r_i' \times F_i$$
$$=\overrightarrow{OA} \times R + L_A$$

其中 $R=\sum_{i=1}^{n} F_i$ 是力系的主矢，所以有

$$L_O=L_A+\overrightarrow{OA} \times R \tag{2.5}$$

在一般情况下（除非 $\overrightarrow{OA} \parallel R$，或 $R=0$），对于不同的矩心，力系的主矩是不同的。所以当说到力系的主矩时，必须同时说明矩心的位置。

如果在一个物体上作用有两个力系，它们的主矢相等，而且对同一点的主矩也相等，则称这两个力系是**等效力系**。例如，共点力系可与一个合力等效，而力偶(力偶矩不为零)却不能与一个力等效，所以力偶是一种最简单的力系，一个力偶只能与另一个力偶等效，只要它们的力偶矩相等就可以了。因此作用在物体上的一个力偶可以在力偶的作用平面内随便移动，也可以从一个平面移动到与之平行的另一平面上，只要始终保持力偶矩不变，如图 2-5 所示。

由力系的等效性，我们要设法找到较简单的等效力系来代替一个已知的力系，这将在下面的力系简化中介绍。这里强调指出的是力系的等效性只对刚体成立。

特别，如果一个力系的主矢与主矩都为零，就称为**零力系**。显然，零力系对刚体不产生力学效应。

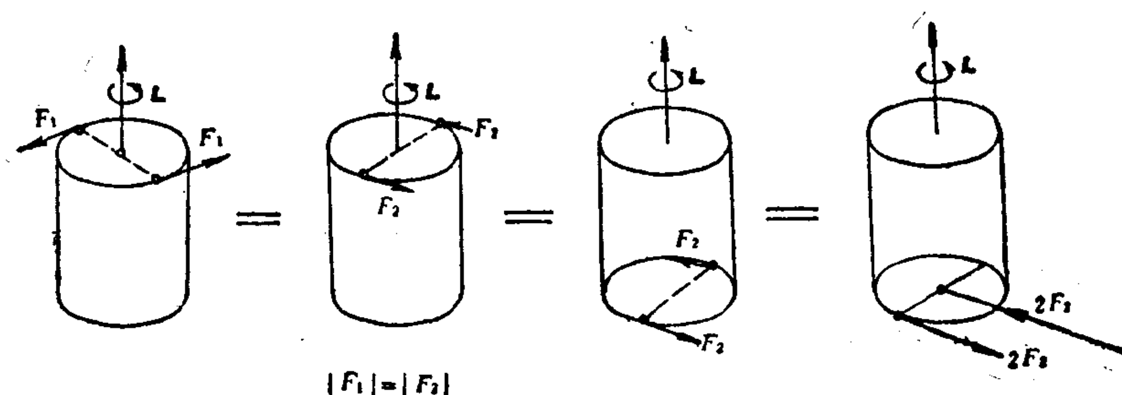


图 2-5

2. 力系的简化

设作用在刚体上的力系为$(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n)$，其作用点为$(M_1, M_2,\cdots,M_n)$，各点的矢径为$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n)$，则可算得此力系的主矢为$\boldsymbol{R}=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$，以及对某点$O$的主矩为$\boldsymbol{L}_O=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i$，现在我们设想有一个新的力系，它由一个力$\boldsymbol{F}$和一个力偶(力偶矩为$\boldsymbol{L}$)组成，其力$\boldsymbol{F}$的大小及方向与(原力系的)主矢$\boldsymbol{R}$相同，作用点为$O$，而力偶矩$\boldsymbol{L}$就等于主矩$\boldsymbol{L}_O$(图 2-6)，显然，这个新力系与原力系是等效的，这时我们就称将原力系对O点作了**简化**。O点称为力系的**简化中心**。当然简化中心可以任意选取，如果另取A为简化中心，则在其等效力系中，作用在A点的力的大小和方向仍与主矢$\boldsymbol{R}$相等，但力偶却不同了，它的矩等于力系对A点的主矩$\boldsymbol{L}_A$(图 2-6)，而$\boldsymbol{L}_A$与$\boldsymbol{L}_O$间的关系由(2.5)式决定。

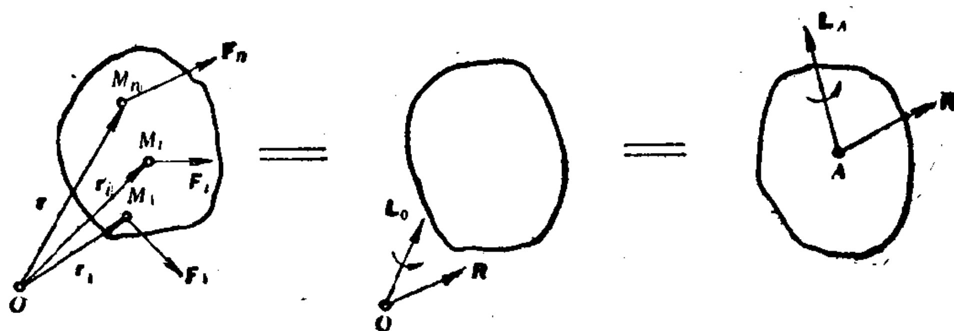


图 2-6

特别，如果一个力系对 O 点简化的结果为零力系（这时向任意点简化都是零力系），则称原力系为**平衡力系**，即有

$$\boldsymbol{R}=0, \quad \boldsymbol{L}_O=0 \tag{2.6}$$

在原来静止的物体上再作用一个平衡力系，物体仍然保持静止状态。显然，一个力系上增加一个平衡力系或者减少一个平衡力系后，都等效于原来的力系。

3. 二力平衡和三力平衡

最简单的平衡力系只有两个力组成，则由主矢 $\boldsymbol{R}=0$，就要求这两个力的大小相等而方向相反。再由主矩 $\boldsymbol{L}_O=0$，就要求这两个力的作用线相同。所以**二力平衡**的充要条件是：两个力的大小相等，方向相反，而且力的作用线相同。

如果平衡力系有三个力组成，则可以证明，这三个力的作用线一定共面（见习题 2-1），而且如果三力平衡时有两个力的作用线是相交的，则第三个力的作用线就一定通过它们的交点，如图 2-7，即三个力共面且汇交。或者说，不平行的三个力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 平衡的充要条件是三力汇交且 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 能首尾相接组成封闭三角形。

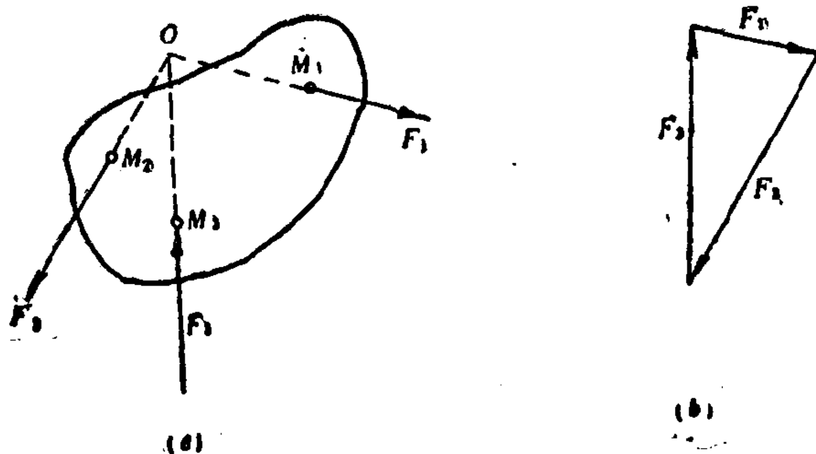


图 2-7

§2.2 受力分析

无论解决静力学问题还是动力学问题，都必须首先弄清楚物体上

作用着哪些力，即所谓受力分析，然后才能建立必要的方程以求出某些未知量，因此受力分析是解决力学问题的一种基本功，要学好、用好。

1．受力图

受力分析的第一步是确定分析的对象，即要确定所研究的是哪一个物体，有时也称为取**脱离体**。第二步是画出所分析的对象及作用在它上面的全部力，通常称为作**受力图**，或称**脱离体图**。受力图上的力不能多画，也不要漏画。因为力是两个物体之间的相互作用，所以每画一个力，都要追问一下是哪一个物体作用于分析对象上的力。

为了正确画出受力图，还需要掌握力的特点与性质。例如，除了万有引力、电磁力等之外，所有的力都是接触力，这时只有在物体相互接触处才受到力的作用；又如，作用力与反作用力是分别作用在两个不同的物体上的；还有约束反力的特点等等。

2．约束与约束力

力学里考虑的物体，有的不受限制可以自由运动，这样的物体被称为**自由体**，例如空中自由飞行的飞机；有的物体则要受到某些限制而不可能沿某些方向运动，这样的物体被称为**非自由体**，例如用绳子悬挂着而不能下落的重球。在静力学中把研究对象的空间位置所受到的来自其他物体的限制称为**约束**。例如悬挂重球的绳子对于重球就是一种约束。由约束施加在被约束物体上的作用力称为**约束力**，或称为约束反作用力，也常简称为**反力**。相反，如果作用在物体上的外力，它的大小与方向都与约束无关，则称为**主动力**，如重力、水压力等，工程上常把主动力称为**荷载**。

约束是通过给对象一个约束力的方式来实现其限制的，因此当人为地撤去一个约束时，必须在接触点上用一个适当的约束力来代替，这就称为**约束解除原理**。约束力一般是未知的，但它的方向总是与约束所能阻止的运动方向相反。

常见的约束和约束力的性质如下：

（1）**绳索**。张紧的绳索对物体的反力是一个拉力，其作用线沿绳索（或其切线方向），它包含一个未知量，即拉力的大小。

（2）光滑的约束面。 物体受一个光滑约束面的约束时（此时应当认为物体表面也是光滑的），反力作用线通过接触点，并沿着两接触面的公共法线方向。这个力只能是压力，所以它指向物体的内部（图2-8）。它有一个未知量，就是力的大小。

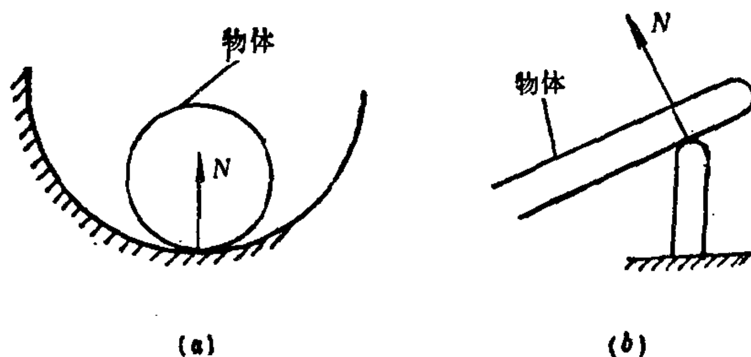


图 2-8

光滑铰链是一种常见的约束，它能使物体上一点保持不动，这时反力作用线经过铰链销的中心（就是那个不动点处）（图 2-9a），而反力的大小和方向都是未知量。在平面情形称为平面铰或柱铰链，这时有两

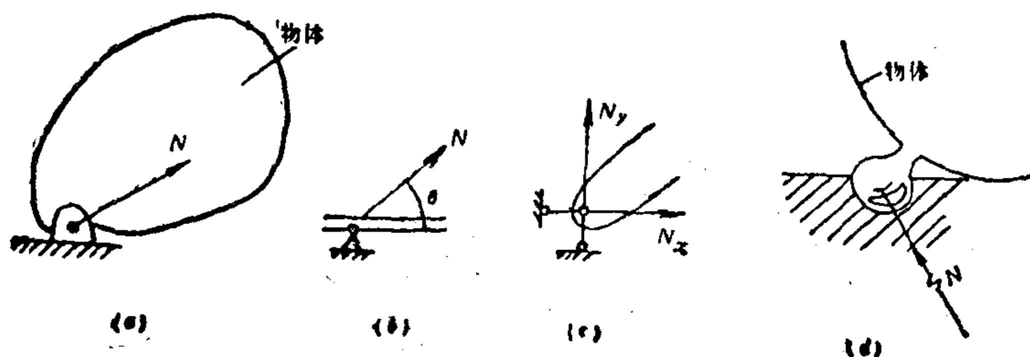


图 2-9

个未知量，常可取成反力的大小 N 及其与水平线的夹角 θ（如图 b），也可取成反力在直角坐标系中的两个分量 N_x 和 N_y（如图 c）。在空间情形就叫做球铰链（如图 d），这时有三个未知量。

（3）连杆。 它是一根轻杆（本身重量可以忽略不计），它的两端 A、B 分别由铰链与支座或物体相连（图 2-10a）。

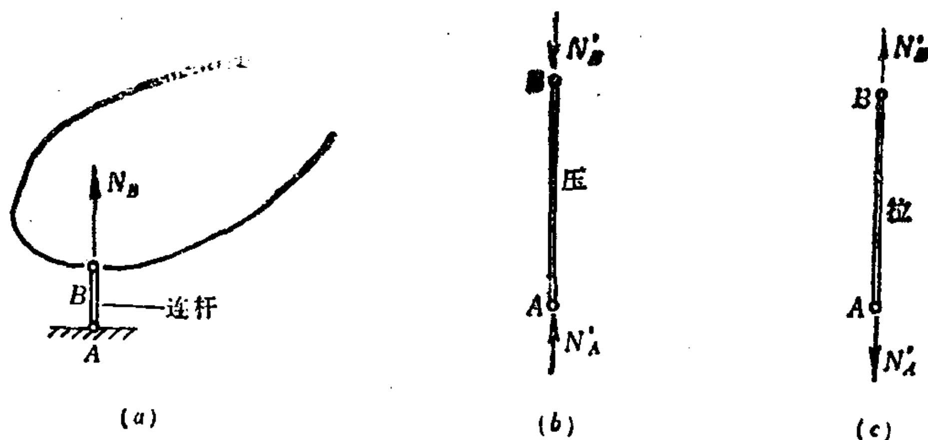


图 2-10

如果两端铰链是光滑的，那么连杆的受力图将如图 2-10 *b* 或 *c* 所示，N'_A 和 N'_B 分别是支座或物体对连杆的作用力。连杆处于平衡状态，N'_A 和 N'_B 的作用线必定通过 AB 连线，而且 $N'_A = -N'_B$。此时杆可能被压缩（图 2-10 *b*）或被拉伸（图2-10*c*），我们要注意的是连杆对物体的反力 N_B，显然，$N_B = -N'_B$，当 N_B 指向物体内部时表明连杆"推"物体（此时连杆本身受压缩），反之，连杆"拉"物体（此时连杆本身受拉伸）。到底是"推"还是"拉"，预先不能确定，解题时，不妨先假设一种情况，然后由平衡方程求出该反力，如果这反力是正的，则说明假设的方向正确，否则方向应相反。

（4）**滑动支座。** 滑动支座（图 2-11 *a*）的一端通过铰链与物体连结，另一端通过滚轮作用于光滑固定支承面上，因此支座可在支承面上自由滑动，所以滑动支座对物体的约束反力垂直于支承面且指向物体内部。滑动支座的简图也可用滚子或连杆代替，如图 2-11 *b* 和 *c*，这时支座的实际构造可以防止物体和支承面相互脱开，即既可承受压缩，也可承受拉伸。

（5）**固端支座。** 物体的一端被固定，或称插入，如图2-12 *a* 所示。固端支座在接触面上对物体作用一约束力系。在平面问题中，这一约束力系是一平面任意力系，如图 2-12 *b* 所示。现将这个力系向作用平面内的点 A 简化，得到一个等效力系，它由一个力 N_A 和一个力偶矩 L_A 组成，如图 *c* 所示。所以对于平面力系，固端支座 A 处的约束作用可简

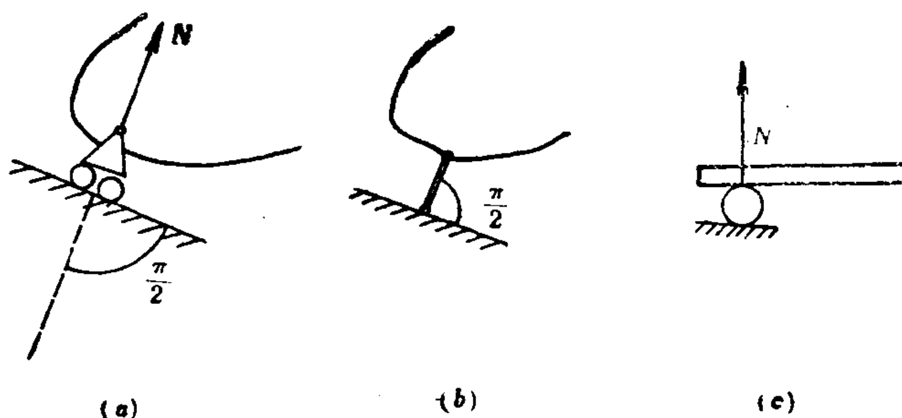


图 2-11

化为两个约束反力 x_A、y_A 和一个力偶矩为 L_A 的约束反力偶，如图 d 所示。一般情况下，这三个量均是未知的。

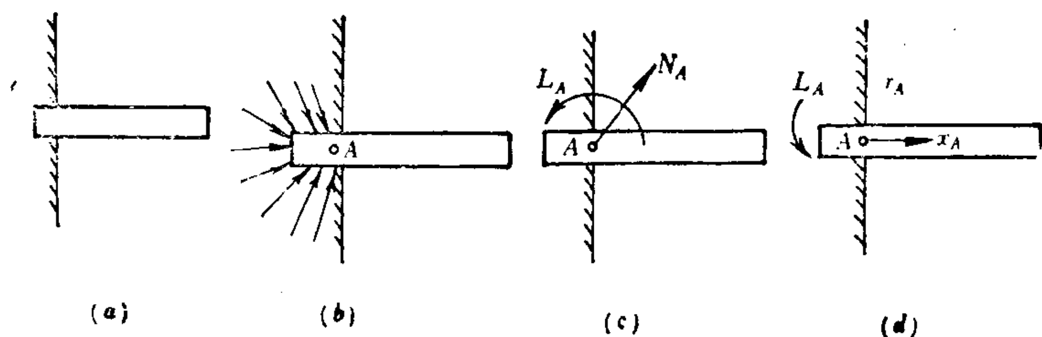


图 2-12

在工程中，固端支座是经常见到的，例如车刀和工件分别夹持在刀架和卡盘上，还有插入地基中的电线杆以及悬臂梁等。

下面举例说明受力图的作法。

例 2.1 自卸载重汽车。汽车翻斗可绕其与底盘连接处(简化为铰 A)转动，油压举升缸筒(作动筒)可简化为连杆，设翻斗重 P，翻斗的简图如图 2-13a，其受力图如图 2-13b 所示，由三力平衡可决定铰 A 的反力 N_A 的方向。

例 2.2 作出图 2-14a 所示的物体系中每个物体的受力图。假设所有接触面都是光滑的，且不计各物体的自重。

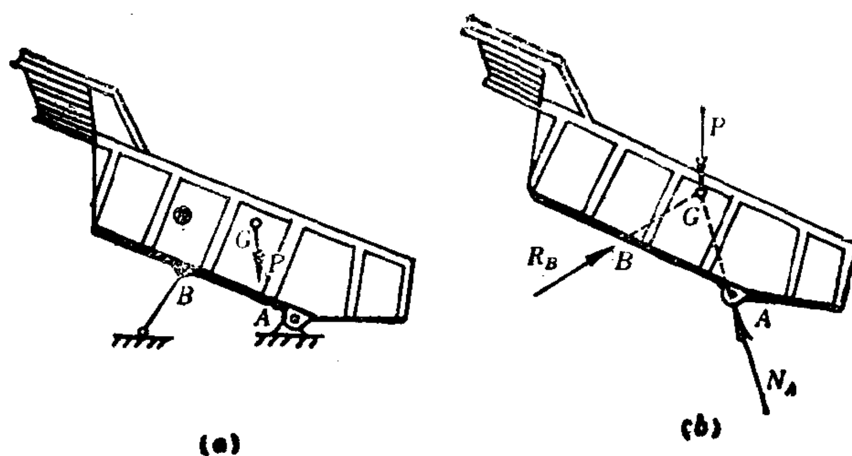


图 2-13

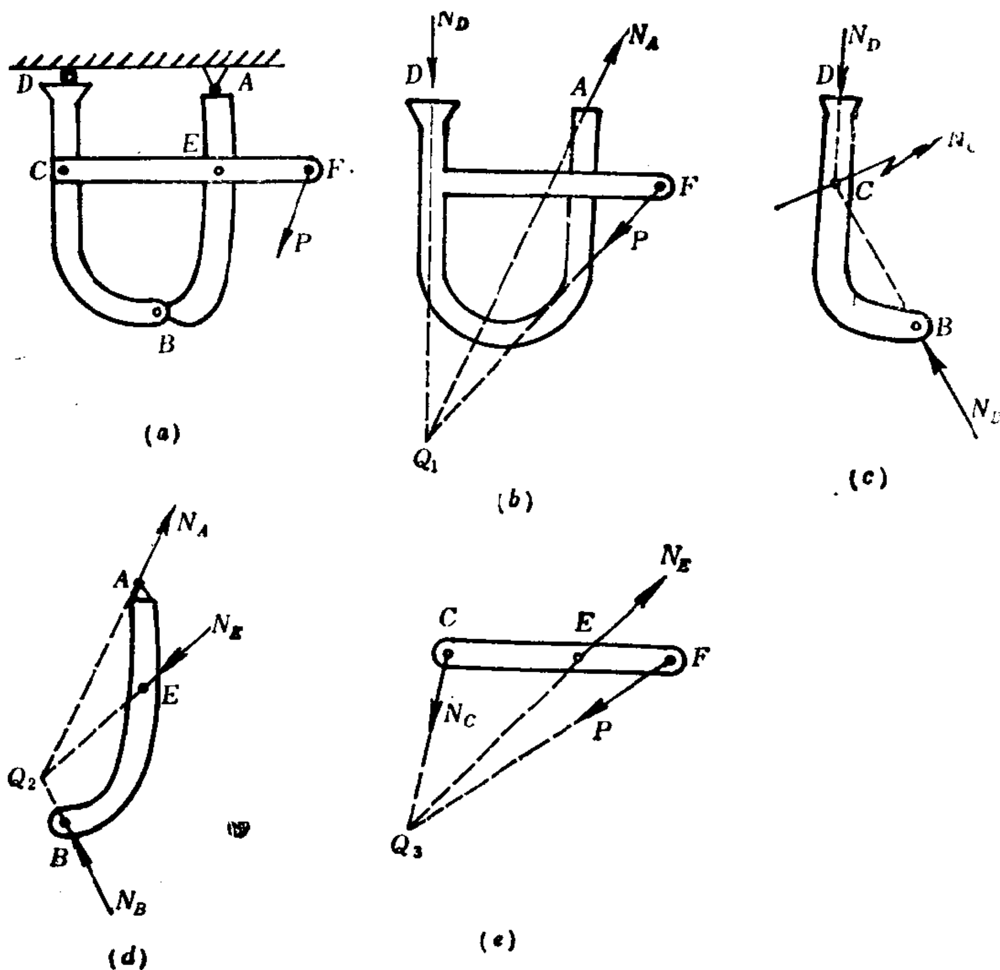


图 2-14

【解】

（1）对象是整个物体系。D 是滚子，N_D 方向已知，设 $\boldsymbol{P}$ 与 N_D 交

于点Q_1。由三力平衡原理，可求出平面铰反力N_A的方向，如图2-14*b*所示。

(2) 对象是物体BD。因N_D通过铰C，由三力平衡原理，铰B的反力N_B也过C点，但铰C的反力N_C方向未知，如图2-14*c*所示。

(3) 对象是物体AB。N_A与N_B方向已知，设交点为Q_2，则N_E通过Q_2，如图2-14*d*所示。

(4) 对象是物体CF。设N_E与P交于点Q_3，则N_C也通过Q_3。如图2-14*e*所示。

§2.3 平衡方程

1. 平面力系的平衡

平面力系是指该力系中每个力的作用线都位于同一平面中。这种力系的平衡条件讨论清楚了，就可以很容易地推广到空间力系。平面力系在实际应用中也是很重要的。在许多工程技术问题中，各个力的作用线本来就是在同一平面之中，这当然是平面力系。在另一些问题中，作用于物体上的是一个空间力系，但它关于某一个平面对称，于是也可以简化为一个平面力系。如将力系中对称的一对力f与f'合起来(图2-15)，它们的合力F就在对称面中，F的大小等于f在对称平面上投影的两倍。例如，飞机在定常航行中，空气对飞机的作用力和重力都对称于飞机的几何对称面(图2-16)，所以可以认为飞机受到平面力系的作用。

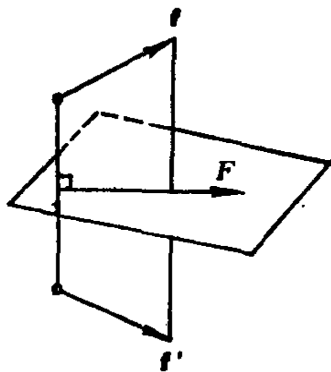


图2-15

上节已经指出，一般力系的平衡条件是主矢$\boldsymbol{R}=0$和主矩$\boldsymbol{L}_O=0$。现在写出平面力系平衡条件的具体形式。取直角坐标系$Oxyz$，使得xy平面就是力系所在的平面。于是力系中每一个力在z轴方向的分量都是零，而每一个力的力矩都沿着z轴方向。因此平衡条件就成为三个标

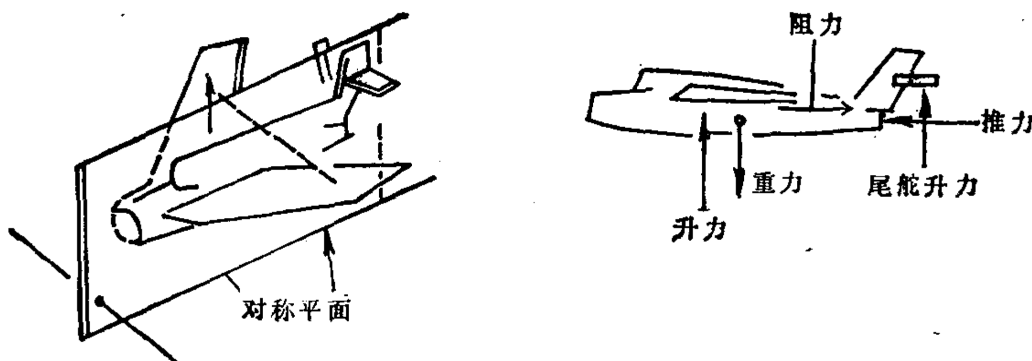


图 2-16

量方程：

$$\sum F_{xi}=0,\ \sum F_{yi}=0,\ L_z=\sum l_{zi}=0 \tag{2.7}$$

这是平面力系平衡条件的基本形式，它包含两个力的投影式和一个力矩式。

平面力系也有其他形式的平衡方程：

三力矩形式。在平面上任选不共线的三个点 A、B、C，则平衡方程为

$$L_{AZ}=0,\ L_{BZ}=0,\ L_{CZ}=0 \tag{2.8}$$

二力矩形式。在平面上任取两点 A 和 B，再取一个单位矢量 $\boldsymbol{l}^0$，只要 $\boldsymbol{l}^0$ 与AB 的连线不垂直，则平衡方程为

$$\sum F_l=0,\ L_{Az}=0,\ L_{Bz}=0 \tag{2.9}$$

其中 F_l 是力 $\boldsymbol{F}_i$ 在 $\boldsymbol{l}^0$ 上的投影。

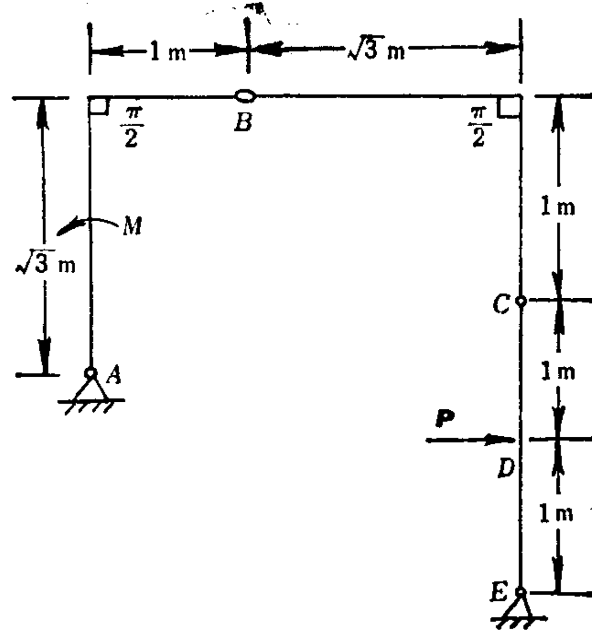
(2.8) 式和 (2.9) 式也都是平面力系平衡的充要条件，请读者自己证明。

例 2.3 一结构如图2-17 a 所示，各构件自身重量均略去不计，若在 D 点作用一大小为 P 的水平力，当机构在图示位置平衡时，试求作用于构件 AB 上的力偶 M 的力偶矩大小以及 A 点约束反力的大小和方向。

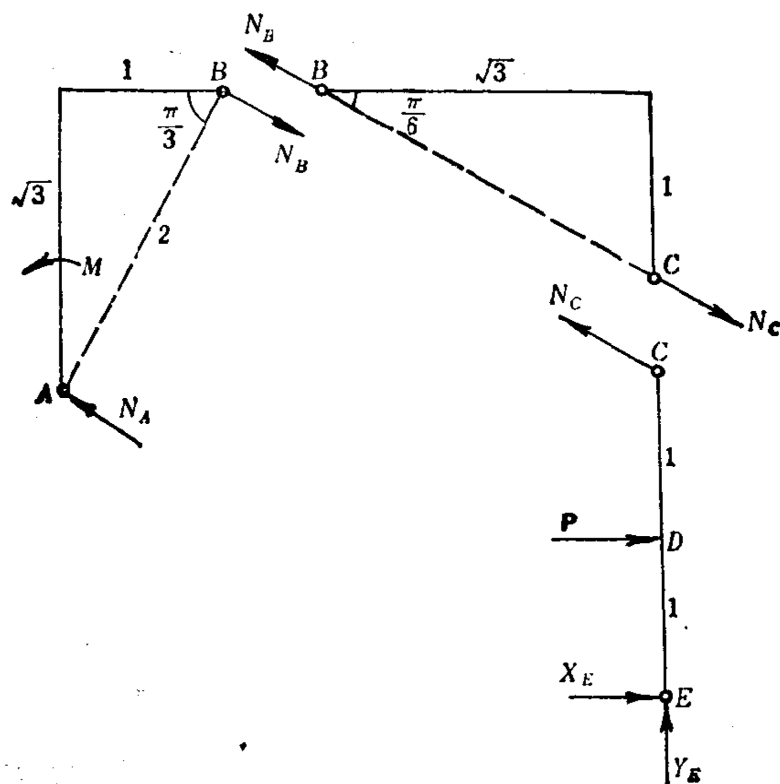
【解】 本结构由三个构件组成，而且不能由整体平衡求出全部支座反力，现分别作出受力图如图 b 所示。

(1) 对象是 BC 杆，由于它是二力杆，于是

$N_B=-N_C$，方向沿 BC 连线。


1 m
$\sqrt{3}$ m
$\frac{\pi}{2}$
B
$\frac{\pi}{2}$
1 m
M
$\sqrt{3}$ m
C
1 m
A
P
D
1 m
E

(a)


N_B
1
B
B
$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{6}$
N_B
$\sqrt{3}$
1
2
M
C
N_C
N_C
C
A
N_A
1
P
D
1
X_E
E
Y_E

(b)

图 2-17

(2) 对象是 CE 杆，由

$$L_{Ez}=0: N_C \cdot 2\cos\frac{\pi}{6}-P=0$$

$$N_C=P/\sqrt{3}$$

(3) 对象是 AB 杆，由

$$L_{Az}=0: M-2\cdot N_B=0$$

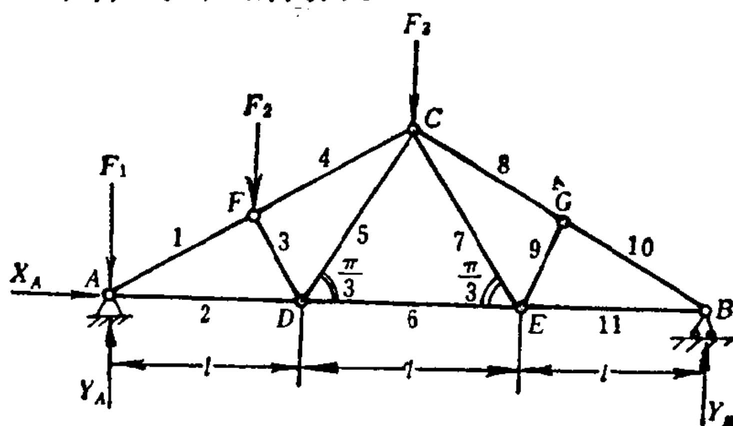
得

$$M=2N_B=2N_C=2P/\sqrt{3}$$

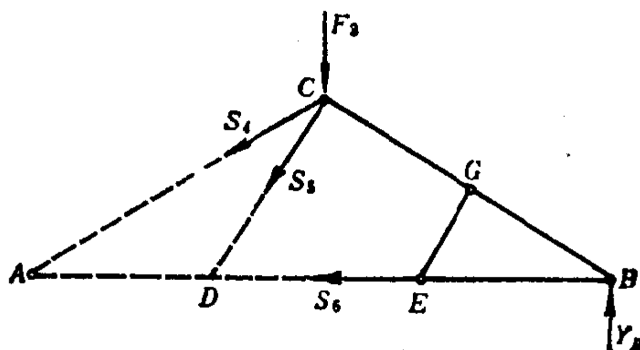
$$N_A=N_B=P/\sqrt{3}$$

N_A 垂直于 AB 连线，方向如图 b 所示。

例 2.4 图 2-18 a 所示的是平面桁架，已知 $F_1=F_3=10\,\text{kN}$，$F_2=20\,\text{kN}$，求杆 4、5、6 的内力。



(a)



(b)

图 2-18

【解】 桁架是工程中一种常用结构，它的特点是：(1) 构成桁架的每一根直杆都不计自重，杆的两端用光滑铰连接，销子中心（称为节点）在杆的中心线上，因此每根杆都是二力杆，只能受拉或受压；(2) 所有外力均在各杆所在的平面内，并且作用于节点上，所以作用于每一个节点上的力都组成平面共点力系。

通常可用两种方法求桁架的内力，一是“节点法”，以节点为对象（共点力系）列出平衡方程（见习题 2-8），二是“截面法”，即截取桁架的一部分为对象，列出平衡方程（平面力系），本题用截面法。

(1) 对象是整个桁架，求支座反力 X_A、Y_A 和 Y_B，如图 a。平衡方程为：

$$\sum F_x = 0: \qquad X_A = 0$$

$$L_{AZ} = 0: \quad 3lY_B - \frac{3}{2}lF_3 - \frac{3}{4}lF_2 = 0,$$

解得

$$Y_B = 10\,\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0: Y_A + Y_B - (F_1 + F_2 + F_3) = 0$$

得

$$Y_A = 30\,\text{kN}$$

(2) 将杆 4、5、6 截断，取右半个桁架（图 2-18 b）作为研究对象，求内力 S_4、S_5、S_6。

$$L_{AZ} = 0: \; 3lY_B - \frac{3}{2}lF_3 - S_5 l\sin\frac{\pi}{3} = 0。$$

得

$$S_5 = +17.3\,\text{kN}$$

$$L_{CZ} = 0: \; \frac{3}{2}Y_B l - S_6 l\sin\frac{\pi}{3} = 0$$

得

$$S_6 = +17.3\,\text{kN}$$

$$L_{DZ} = 0: \quad 2lY_B - \frac{l}{2}F_3 + \frac{1}{2}lS_4 = 0$$

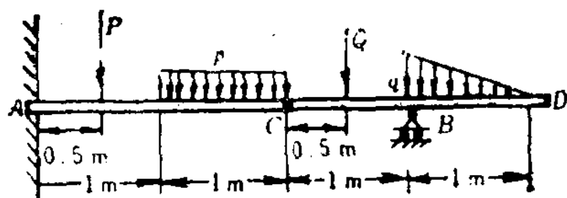
得

$$S_4 = -30\,\text{kN}$$

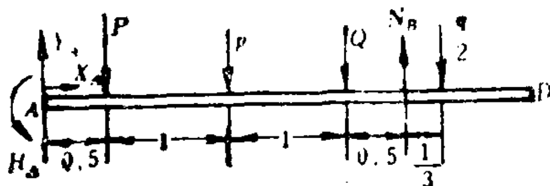
所得结果还可用左半部分桁架的平衡方程来核对。

例 2.5 如图 2-19a 所示，水平梁由 AC 和 CD 两部分组成，它们在 C 处用铰链相连。梁的 A 端插入墙中；在 B 处由滑动支座支承。已知：$Q=10\,\text{kN}$，$P=20\,\text{kN}$，均布载荷 $p=5\,\text{kN/m}$，梁的 BD 段作用有线性分布载荷，在 D 端为零，在 B 处达最大值 $q=6\,\text{kN/m}$。试求 A 和 B 处的约束反力。

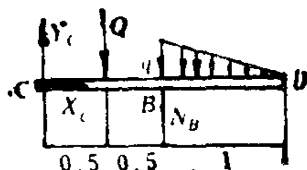
【解】 （1）考察全梁 AD。受力图如图 b，平衡方程为：



(a)



(b)



(c)

图 2-19

$$\sum F_x = 0: \quad X_A = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_y = 0: \quad Y_A + N_B - P - Q - p - \frac{1}{2}q = 0 \tag{2}$$

$$L_{Az} = 0: \quad M_A + 3N_B - 0.5P - 2.5Q - 1.5p - q\left(\frac{1}{3}+3\right) = 0 \tag{3}$$

（2）对于 CD 段梁，受力图如图 c。因（1）—（3）式中有 4 个变量，所以还要再补充一个方程：

$$L_{Oz}=0:\ N_B-\frac{1}{2}q\left(1+\frac{1}{3}\right)-0.5Q=0 \qquad (4)$$

（3）解方程：先由（4）式可解得

$$N_B=9\,\text{kN}$$

代入（1）—（3）式，即得

$$M_A=25.5\,\text{kN·m}$$

$$Y_A=29\,\text{kN}$$

$$X_A=0$$

2．滑动摩擦

在前面的讨论中我们都假定两个物体相接触处是完全光滑的，忽略了它们之间的摩擦。但在实际上，两物体的接触面间总存在一定的摩擦，有时摩擦还起着决定性的作用。例如，车床上的卡盘夹固工件，就要依靠摩擦；在精密仪表中，很小的摩擦也会影响仪器的灵敏度和正确性。

按照接触物体之间的运动情况，摩擦可分为**滑动摩擦**和**滚动摩擦**两类，这里只讲滑动摩擦。由于物理本质的不同，滑动摩擦又分为干摩擦和湿摩擦。如果两物体的接触面间是干燥的，就是**干摩擦**；如果两物体的接触面间充满足够的液体，就称为**湿摩擦**。下面讨论存在滑动摩擦时的平衡问题。

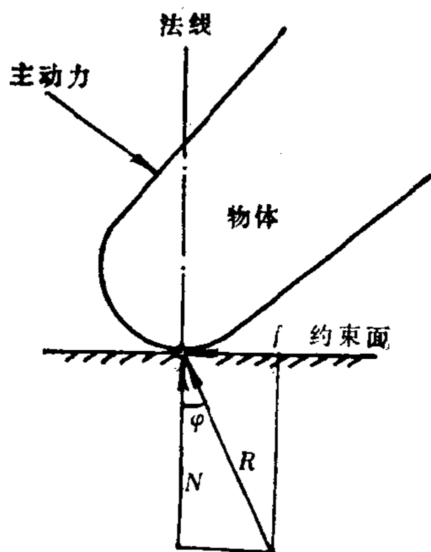


图 2-20

两个相互接触的物体，当在其接触表面之间有相对滑动的趋势，但仍保持静止状态时，彼此存在着阻碍相对滑动的阻力，这种阻力就称为静滑动摩擦力，简称**静摩擦力**。

如图 2-20，当物体与约束面间存在摩擦时，约束反力 $\boldsymbol{R}$ 就不再沿法线方向了，这时可将 $\boldsymbol{R}$ 分解为法向反力 $\boldsymbol{N}$ 和切向摩擦力 $\boldsymbol{f}$。我们知道，当物体有相对滑动（即接触点的相对速度不为零）时，摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 的方向总是与

物体相对于约束面的运动方向相反，但在平衡问题中，相对运动还没有发生，怎样来决定f的方向呢？这时，我们认为摩擦力f的方向与物体的**相对运动趋势**的方向相反。所谓“趋势”，是因为物体处于静止状态，如果现在假想接触处是完全光滑（摩擦消失）的，则物体就要沿着这个方向作相对滑动。

摩擦力的起因是比较复杂的，要用微观的物理规律才能解释它。但在理论力学中，我们只是从宏观的观点来说明摩擦力的性质。我们知道，摩擦力的大小和主动力的情况有关。例如，木块放在粗糙的水平桌面上，如果不去推它，那么桌面的反力沿竖直方向，即摩擦力是零。如果用水平力去推木块，就有摩擦力来阻碍其运动。水平推力越大，摩擦力也越大。当水平推力大到一定程度时，摩擦力就不再增大了，这时，木块就开始滑动，平衡被破坏。可见静摩擦力与一般的约束力不同，它存在一个最大值，即

$$f \leqslant f_{\max} \tag{2.10}$$

这里$f_{\max}$就是最大静摩擦力。大量实验证明了下述**库仑定律**：最大静摩擦力的方向与相对滑动趋势相反，其大小与两物体间的正压力（即法向反力）成正比，比例系数μ只依赖于物体与约束面材料的性质，与表观的宏观接触面的大小无关，即

$$f_{\max} = \mu N \tag{2.11}$$

这里μ称为摩擦系数，它是一个无量纲量。例如，精加工并上了油的金属表面相互之间的摩擦系数是0.10，木材和石头之间的摩擦系数为0.5左右，而橡皮与固体间的摩擦系数为1—4。

将(2.10)式和(2.11)式结合起来，即得出静摩擦力的基本关系式：

$$f \leqslant \mu N \tag{2.12}$$

当摩擦力达到最大静摩擦力时，约束反力$\boldsymbol{R}$和法线的夹角叫做**摩擦角**，若用ε来表示，则容易看出有下列关系：

$$\begin{cases} \mu = \operatorname{tg} \varepsilon \\ f_{\max} = N \operatorname{tg} \varepsilon \end{cases} \tag{2.13}$$

在一般情况下，约束反力$\boldsymbol{R}$与法线的夹角小于摩擦角。

例 2.6 设梯子靠在墙上，倾角为 α。梯子与墙以及梯子与地面之间的摩擦系数均为 μ。梯子长为 l，重 Q，重心在中点。人重 W，站在梯子上（见图 1-21）。问人离梯下端的距离 a 为多少时能使梯子保持不动？

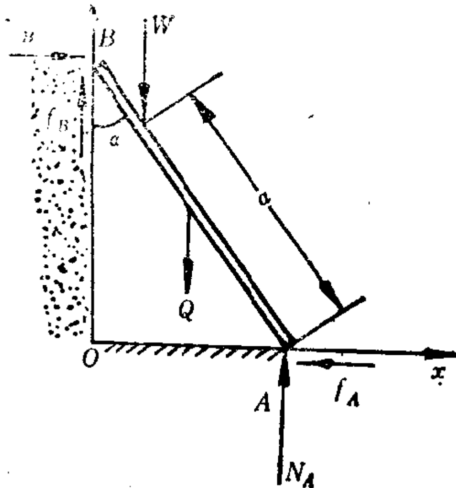


图 2-21

【解】 根据滑动趋势，梯子 A 端有向右滑动的趋势，梯子的 B 端有向下滑动的趋势，因而决定了 A、B 处摩擦力 $\boldsymbol{f}_A$ 与 $\boldsymbol{f}_B$ 的指向如图。而它们的大小则由下面不等式决定：

$$f_A \leqslant \mu N_A, \quad f_B \leqslant \mu N_B$$

这样在解平衡方程时就要出现不等式，从而给求解带来麻烦。因此，在摩擦问题中，常常采用所谓临界情况的方法来求解。

设人离梯子下端的距离 a 增大到 $a_{\max}$ 时，梯子处于“临界”状态，即将动而未动的状态。因为它“将动”，所以可以用等式 $f = f_{\max} = \mu N$；因为它“未动”，则又满足平衡方程。所以，在这种临界的情况下，平衡方程仍然成立（式中 a 要改为 $a_{\max}$），而不等式要用等式来代替：

$$f_{A\max} = \mu N_A, \quad f_{B\max} = \mu N_B$$

因此就可像平衡问题一样求解了。

现在根据梯子的受力图可列出临界状态的平衡方程：

$$\Sigma F_x = 0: \quad N_B - \mu N_A = 0$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad -W - Q + N_A + \mu N_B = 0$$

$$L_{Az} = 0: \quad -N_B l \cos\alpha - \mu N_B l \sin\alpha + W a_{\max} \sin\alpha + Q \frac{l}{2} \sin\alpha = 0$$

于是可解得：

$$N_A = \frac{1}{1+\mu^2}(Q+W)$$

$$N_B = f_A = \frac{\mu}{1+\mu^2}(Q+W)$$

$$f_B = \frac{\mu^2}{1+\mu^2}(Q+W)$$

$$\frac{a_{\max}}{l} = \frac{1}{1+\mu^2}\left(1+\frac{Q}{W}\right)(\mu^2+\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha) - \frac{Q}{2W}$$

因而平衡条件是：

$$a \leqslant l\left[\frac{1}{1+\mu^2}\left(1+\frac{Q}{W}\right)(\mu^2+\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha) - \frac{1}{2}\cdot\frac{Q}{W}\right]$$

例 2.7 如图2-22 a 所示，长为 $2l$ 的均质杆 AB 搁在半径为 R 的均质圆柱体上，杆轴与圆柱轴互相垂直，且杆轴与圆柱重心在同一竖直平面内，A 点为光滑平面铰座，其余接触处的摩擦系数均为 μ。求平衡时杆与水平面的夹角 θ 的最大值。

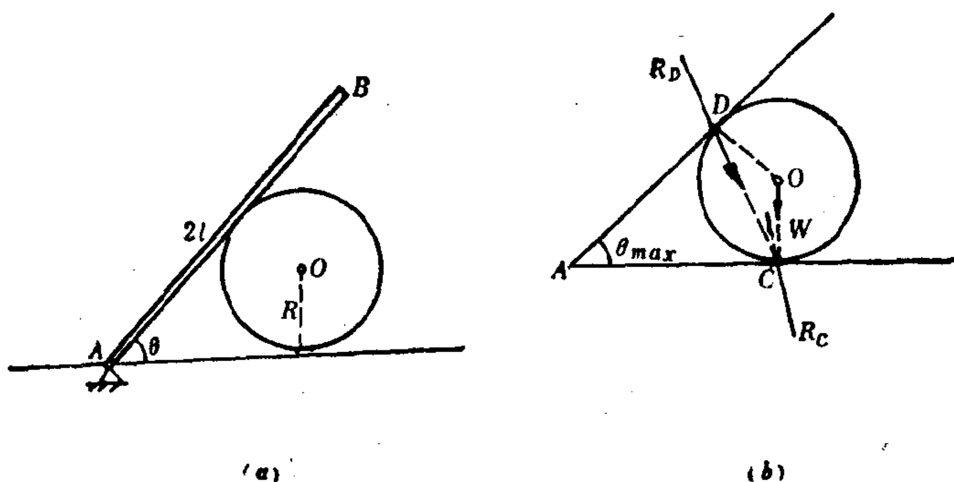


图 2-22

【解】 这是有摩擦的平面力系，现用摩擦角求解。

取圆柱为对象，作受力图如图 b，这时，柱重 $\boldsymbol{W}$ 与地面总反力 $\boldsymbol{R}_C$ 以及 D 点总反力 $\boldsymbol{R}_D$ 这三个力汇交于 C 点！在临界状态，$\theta=\theta_{\max}$，D点要比 C 点先达到临界值，再因 $\triangle ADC$ 是等腰的，所以有

$$\theta_{\max} = 2\varepsilon = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\mu$$

例 2.8 有摩擦时的皮带张力（图 2-23 a）。设皮带与固定圆柱

（或滑轮）之间的摩擦系数为 μ，皮带绕过的角度为 φ。问皮带静止时，两端拉力 T_1 和 T_2 满足什么关系？

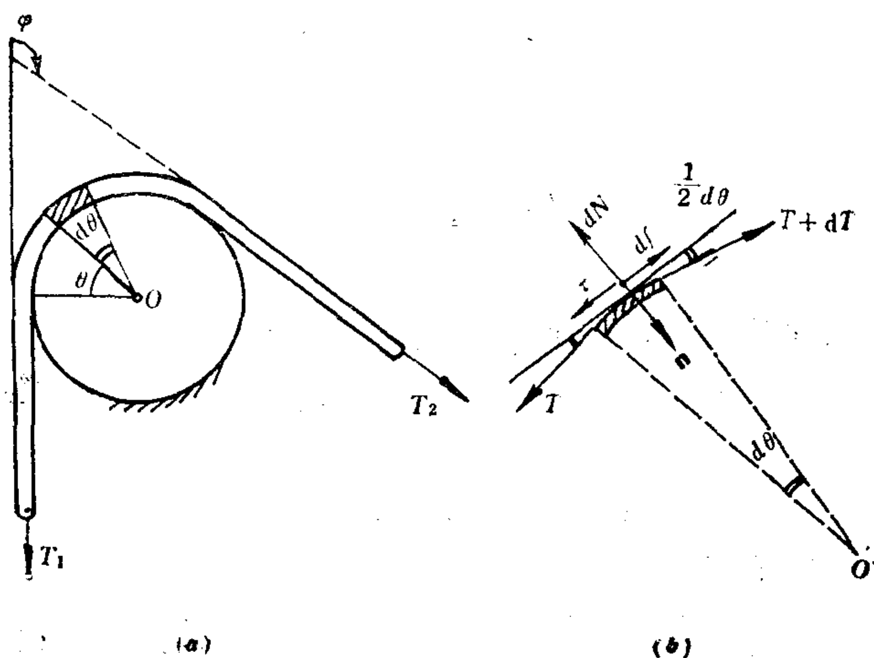


图 2-23

【解】 我们采用微元平衡法来分析一种临界情形。设皮带即将趋于向 T_1 那一边滑动。取 θ 角处的一段皮带微元（其中心角为 $\mathrm{d}\theta$），作出它的受力图（如图 b）。两端张力的大小为 T 和 $T+\mathrm{d}T$，法向反力为 $\mathrm{d}N$，摩擦力为 $\mathrm{d}f=\mu\mathrm{d}N$。取中点处的切向 $\boldsymbol{\tau}$ 和法向 $\boldsymbol{n}$，并沿这两个方向列出平衡方程，有

$$\Sigma F_n=0 \quad \left(\sin\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta \doteq \frac{1}{2}\mathrm{d}\theta\right):$$

$$\mathrm{d}N-T\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)-(T+\mathrm{d}T)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)=0 \tag{1}$$

$$\Sigma F_\tau=0\left(\cos\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta\doteq 1\right):$$

$$T+\mathrm{d}T-T+\mu\mathrm{d}N=0 \tag{2}$$

在(1)式中略去高阶小量得到 $\mathrm{d}N=T\mathrm{d}\theta$，将此式代入(2)式得

$$\mathrm{d}T=-\mu T\mathrm{d}\theta \tag{3}$$

分离变量并在 $\theta=0$ 到 $\theta=\varphi$ 之间积分，得

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{\mathrm{d}T}{T}=-\int_0^{\varphi}\mu\mathrm{d}\theta$$

因此

$$\frac{T_1}{T_2}=\mathrm{e}^{\mu\varphi}$$

这是开始向 T_1 那边滑动时的拉力比。同样，如果绳子开始向 T_2 那边滑动，那么有 $T_2/T_1=\mathrm{e}^{\mu\varphi}$ 或者是 $T_1/T_2=\mathrm{e}^{-\mu\varphi}$，由此得到平衡条件是

$$\mathrm{e}^{-\mu\varphi}\leqslant T_1/T_2\leqslant\mathrm{e}^{\mu\varphi}$$

3．空间力系的平衡

空间力系的平衡条件仍然是主矢 $\boldsymbol{R}=0$ 和主矩 $\boldsymbol{L}_o=0$ 。在直角坐标系下，就有六个独立的平衡方程，即

$$\begin{cases}\Sigma F_{xi}=0,\ \Sigma F_{yi}=0,\ \Sigma F_{zi}=0\\ L_x=0,\quad L_y=0,\quad L_z=0\end{cases}\tag{2.14}$$

(2.14) 式是空间力系平衡方程的基本形式，和平面力系的情形一样，也可有其他形式，但 (2.14) 式是最常用的。

空间力系的平衡问题与平面力系相比没有根本的差别。其解题步骤为：(1) 取定对象，(2)作出受力图并建立直角坐标系，(3)列出各个力作用点的位置坐标和力的分量，(4) 按 (2.14) 式列出平衡方程并求解。

例 2.9 有一空间结构如图 2-24 所示，AB 杆的自重不计，物块重为 W 。求球铰链 A 处的反力分量 X_A、Y_A、Z_A 以及绳子的拉力 T 和 T' 。

【解】 (1) 对象：AC 杆和物块；

(2) 受力图和直角坐标系 $A—xyz$ 如图 a 所示。

(3) 各个力及作用点可列表如下(参看图 b、c)：

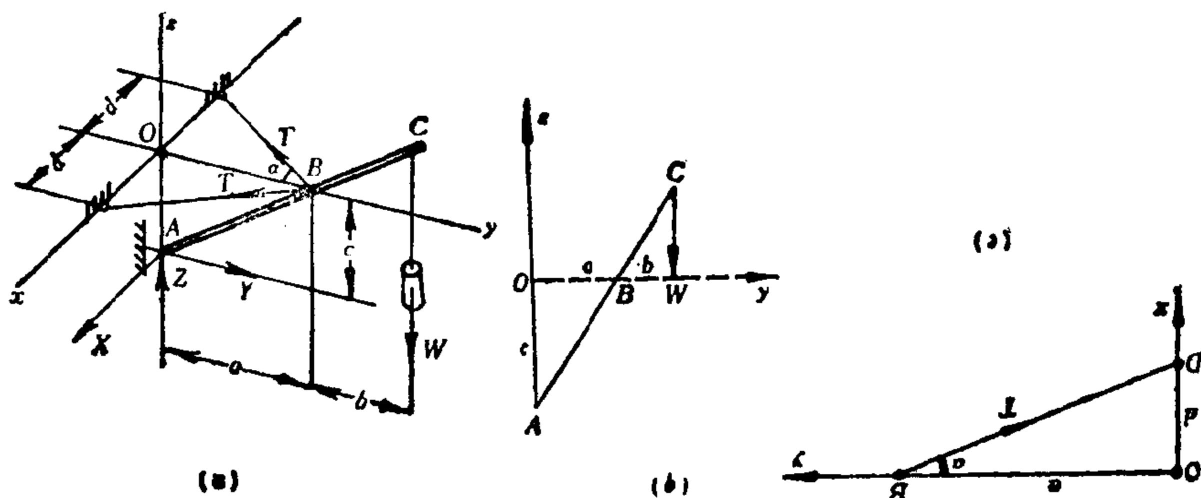


图 2-24

物体	力的作用点及其坐标			力矢及其分量		
AC 杆	$A(0,$	$0,$	$-c)$	$R_A(X_A,$	$Y_A,$	$Z_A)$
	$B(0,$	$a,$	$0)$	$T(T\sin\alpha,$	$-T\cos\alpha,$	$0)$
	$B(0,$	$a,$	$0)$	$T'(-T'\sin\alpha,$	$-T'\cos\alpha,$	$0)$
物块	$C(0,$	$a+b,$	$z_c)$	$W(0,$	$0,$	$-W)$

（4）平衡方程及其解：

$$\Sigma F_x=0:\ X_A+(T-T')\sin\alpha=0 \tag{1}$$

$$\Sigma F_y=0:\ Y_A-(T+T')\cos\alpha=0 \tag{2}$$

$$\Sigma F_z=0:\ Z_A-W=0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{L}_A=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & -c \\ X_A & Y_A & Z_A \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{r} \\ 0 & a & 0 \\ (T-T')\sin\alpha & -(T+T')\cos\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & a+b & z_0 \\ 0 & 0 & -W \end{vmatrix}=0$$

由此可得

$L_{Ax}=0$: $cY_A-W(a+b)=0$

$$Y_A=\frac{a+b}{c}W \tag{4}$$

$L_{Ay}=0$: $-cX_A=0$

$$X_A=0 \tag{5}$$

$L_{Az}=0$: $a(T-T')\sin\alpha=0$

$$T=T' \tag{6}$$

将(4)和(6)式代入(2)式，得

$$T=T'=\frac{(a+b)\sqrt{a^2+d^2}}{2ac}W \tag{7}$$

其中用到

$$\cos\alpha=a/\sqrt{a^2+d^2}$$

本题解为(3)～(7)式。

注意，(6)式与(1)、(5)式是等价的。

§2.4　静定刚体系统的矩阵解法

若干个刚体通过各种约束而相互联系，就组成了刚体系统。当刚体系平衡时，该系统中的每一个刚体也都是平衡的。设刚体系由 n 个刚体组成，若每一个刚体都受空间任意力系的作用，则共有 $6n$ 个独立的平衡方程。如系统中有的刚体受汇交力系或平面力系等作用时，则系统的平衡方程个数将相应减少。当系统中的未知量数目等于独立的平衡方程数目时，所有的未知量都能由平衡方程求出，这类系统称为**静定系统**，或称**静定问题**。我们前面讨论的全是静定系统。在工程实际中，有时为了提高结构的刚度和坚固性，常常增加多余的约束，从而使未知量的数目多于平衡方程的个数，这样就无法解出全部未知量，这类系统称为

静不定系统，也可称为**超静定系统**或**静定不问题**。关于静不定问题我们将在第二部分的第七章中讨论。

1. 矩阵形式的平衡方程

类似于单个刚体的(2.14)式，由n个刚体组成的静定系统，共有$6n$个独立的平衡方程(空间力系)。设系统的外载荷为已知，则这$6n$个方程实际上是以约束力为未知量的线性代数方程组，当n很大时，手工计算是十分困难的，因此要用电子计算机求解，这就要求采用平衡方程的矩阵解法。下面介绍这种解法的基本思想。

首先要建立矩阵形式的平衡方程。为此建立一个直角坐标系$Oxyz$，将所有未知约束力(包括约束力矩，以下同)在该坐标系的分量按序记作一个列阵$\{X'\}$，它共有$6n$个分量，再将刚体上载荷的主矢及对O点的主矩在$Oxyz$系的分量也按序排列，从而构成外载荷列阵$\{B\}$，它也有$6n$个分量，设为

$$\{B\}=(b_1,b_2,\cdots,b_{6n})^T$$

则全部平衡方程就可写成矩阵形式

$$[A']\{X'\}=-\{B\} \tag{2.15}$$

其中$[A']$是$6n\times6n$阶常数矩阵。

注意到在实际问题中，约束力的大小虽是未知的，但约束力的方向或某些分量往往可以根据约束的性质确定，因此，如对每个约束建立各自的局部坐标系，则在这种局部坐标系中，未知的约束分量数就可减至最少，也就减少了总的未知量个数，而且，我们要求的也正是这种局部坐标系下的约束力分量。可改写(2.15)式后，外载荷列阵$\{B\}$保持不变，而约束力列阵$\{X'\}$改为新的列阵$\{X\}$，它的元素是各局部坐标系中的未知约束力分量，设共有k个元素，显然$k\leqslant6n$，常数矩阵$[A']$也要相应地变为新的$6n\times k$阶矩阵$[A]$，并称之为**约束系数矩阵**，它与各局部坐标系到整体坐标系$Oxyz$间的变换有关。于是**矩阵形式的平衡方程为：**

$$[A]\{X\}=-\{B\} \tag{2.16}$$

因列阵$\{X\}$是k阶的，列阵$\{B\}$是$6n$阶的，如$k<6n$，则根据线性代数理论，可以化到k阶的线代数方程组，然后用高斯消去法或其他方法求出列阵$\{X\}$。

2. 求解具体步骤

（1）刚体编号：$i=1,2,\cdots,n$，共有 n 个刚体。

（2）约束编号：按刚体编号顺序，依次将每个刚体的约束编号（不重复编号），设为 $j=1,2,\cdots,m$，即共有 m 个约束。

（3）建立整体直角坐标系 $Oxyz$。

（4）形成已知载荷列阵 $\{B\}$：

按刚体编号顺序，对第 i 个刚体建立载荷子阵 $\{B_i\}$，它由第 i 个刚体上已知载荷的主矢分量（$\overline{X}_i$, $\overline{Y}_i$, $\overline{Z}_i$）和对 O 点的主矩分量（L_{ix}, L_{iy}, L_{iz}）组成，即

$$\{B_i\}=(\overline{X}_i,\ \overline{Y}_i,\ \overline{Z}_i,L_{ix},L_{iy},L_{iz})^T \tag{2.17}$$

将各子阵顺序排列，就得到总载荷列阵 $\{B\}$，即

$$\begin{aligned}\{B\}&=(B_1^T,B_2^T,\cdots,B_n^T)^T\\&=(\overline{X}_1,\overline{Y}_1,\overline{Z}_1,L_{1x},L_{1y},L_{1z},\cdots,\\&\quad\ \overline{X}_n,\overline{Y}_n,\overline{Z}_n,L_{nx},L_{ny},L_{nz})^T\end{aligned} \tag{2.18}$$

所以 $\{B\}$ 是 $6n$ 阶列阵，每个元素都是整体系中的量。

（5）建立约束转换矩阵 $[S]_j$：

i）建立各个约束的局部坐标系 $C_jx'y'z'$ 及与总体系 $Oxyz$ 间的变换矩阵 $[P]_j(j=1,2,\cdots,m)$。

设第 j 个约束的作用点为 C_j，根据约束的性质，建立直角系 $C_jx'y'z'$，例如，当约束力方向为已知时，则令 x' 轴沿此方向。

再在 C_j 点作一个与整体系 $Oxyz$ 相平行的坐标系，记作 C_jxyz，则可求得 $C_jx'y'z'$ 系与 C_jxyz 系间的变换矩阵 $[P]_j$ 为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=[P]_j\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \tag{2.19}$$

其中（x, y, z）和（x', y', z'）是刚体上同一点分别在 C_jxyz 系和 $C_jx'y'z'$ 系中的坐标。

ii）形成约束转换矩阵 $[S]_j(j=1,2,\cdots,m)$。

设第 j 个约束由约束力主矢 $\boldsymbol{R}_j$ 和主矩 $\boldsymbol{M}_j$ 表示，$\boldsymbol{R}_j$ 在局部系 $C_jx'y'z'$ 中的分量为 $(R_{x'},R_{y'},R_{z'})$，而在整体系中的分量为 (R_x,R_y,R_z)；同样，$\boldsymbol{M}_j$ 在局部坐标系中的分量为 $(M_{x'},M_{y'},M_{z'})$。现在建立局部与整体两组分量间的转换矩阵。

因为局部系与整体系间的变换矩阵为 $[P]_j$，所以主矢 $\boldsymbol{R}_j$ 的两组分量间成立

$$\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = [P]_j \begin{pmatrix} R_{x'} \\ R_{y'} \\ R_{z'} \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

对于主矩 $\boldsymbol{M}_j$，因矩心由 C_j 点变到 O 点，根据(2.5)式有

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{M}_j + \overrightarrow{OC_j} \times \boldsymbol{R}_j \tag{2.21}$$

其中 $\boldsymbol{M}_O$ 是第 j 个约束力系对 O 点的主矩。为了将(2.21)式写成矩阵形式，设矢量 $\overrightarrow{OC_j}$ 在整体系中的投影为 (x_c,y_c,z_c)，建立反对称矩阵 $[C]_j$ 即

$$[C]_j = \begin{pmatrix} 0 & -z_c & y_c \\ z_c & 0 & -x_c \\ -y_c & x_c & 0 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

又设 $\boldsymbol{M}_O$ 在整体系中的分量为 (M_x,M_y,M_z)，则(2.21)式的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = [P]_j \begin{pmatrix} M_{x'} \\ M_{y'} \\ M_{z'} \end{pmatrix} + [C]_j[P]_j \begin{pmatrix} R_{x'} \\ R_{y'} \\ R_{z'} \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

将(2.20)式和(2.23)式合并，即得

$$\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \\ \cdots\cdots \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} [P]_j & [0] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [C]_j\cdot[P]_j & [P]_j \end{array}\right) \begin{pmatrix} R_{x'} \\ R_{y'} \\ R_{z'} \\ \cdots\cdots \\ M_{x'} \\ M_{y'} \\ M_{z'} \end{pmatrix} . \tag{2.24}$$

其中 [0] 是 3×3 阶的零矩阵。

令

$$[S]_j=\begin{pmatrix} [P]_j & \vdots & [0] \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ [C]_j\cdot[P]_j & \vdots & [P_j] \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

称 $[S]_j$ 为第 j 个约束转换矩阵。

（6）建立未知约束列阵 $\{X\}$ 。

将第 j 个约束对第 i 个相关刚体(对内部约束,取 i 为小编号）的约束力系（约束力和约束力矩）在局部系 $C_jx'y'z'$ 中的非零分量组成约束子阵 $\{X_j\}$ ，显然它的元素数目小于或等于 6 。按约束编号顺序将各约束子阵排列,组成**未知约束列阵** $\{X\}$,即

$$\{X\}=(X_1^T,X_2^T,\cdots,X_m^T)^T \tag{2.26}$$

设 $\{X\}$ 的元素数为 k ,由于是静定系统,所以 $k\leqslant 6n$ 。

（7）组成系统的总约束系数矩阵 $[A]$：

i）构造约束系数子阵 $[T]_j(j=1,2,\cdots,m)$。

因约束子阵 $\{X_j\}$ 中没有零元素，故在（2.24）式最右边的列阵 $\{R_j'\}=(R_{x'},R_{y'},R_{z'},M_{x'},M_{y'},M_{z'})^T$ 中划去零元素后即为 $\{X_j\}$，若列阵 $\{R_j'\}$ 的第 l（$\leqslant 6$）个元素为零，则（2.24）式中矩阵 $[S]_j$ 的第 l 列元素在运算中将不起作用。这样我们可把 $[S]_j$ 中对应于 $\{R_j'\}$的零元素的列全部删去，从而得到一个缩减了的矩阵,记作 $[T]_j$，它有 6 行,而列数与 $\{X_j\}$ 相同。$[T]_j$ 的作用是将第 j 个约束力系在局部系 $C_jx'y'z'$ 中的非零分量构成的约束子阵 $\{X_j\}$ 转换到整体系$Oxyz$。我们称 $[T]_j$ 为约束系数子阵。

ii）将 $[T]_j$ 在整体系中总装,形成总约束系数矩阵 $[A]$ 。

前已指出,当刚体系平衡时,每个刚体也都平衡。

对第 i 个刚体（$i=1,2,\cdots,n$）,其载荷子阵是 $\{B_i\}$，而该刚体上可作用有好几个约束，设其最小编号为 j，其相应的约束系数子阵为 $[T]_j$，现将其记作 $[A_{ij}]$,并作为总系数阵 $[A]$ 的分块子矩阵。对其余的约束,同样可有相应的分块子阵编号。如果某个约束 j 同时作用于两个相邻的刚体,则根据作用力和反作用力定律,规定在较小编号的刚体

位置上安放 $[T]_j$，而在较大编号的刚体位置上则要放 $-[T]_j$。于是将各个$[A_{ij}]$"对号入座"装配到相应的位置上，并将空位上全用 0 填补，这样就得到了总**约束系数矩阵** $[A]$，它是 $6n\times k$ 阶的，其中$k\leqslant 6n$，即

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

(8) 求解平衡方程。

根据(2.17)式、(2.26)式和(2.27)式，就得到矩阵形式的平衡方程(2.16)，即

$$[A]\{X\}=-\{B\}$$

然后由电子计算机即可解出全部未知约束反力。

3. 平面力系的相应公式

设第 i 个刚体在平面力系作用下平衡，其上作用有 j 个约束。今将力系所在的平面取作整体坐标系的 Oxy 平面，也即局部坐标系的 $C_jx'y'$ 平面，则

载荷子阵 $\{B_i\}$ 只有 3 个元素，即

$$\{B_i\}=\begin{Bmatrix} \overline{X}_i \\ \overline{Y}_i \\ L_{iz} \end{Bmatrix}_{3\times 1} \tag{2.17'}$$

局部系与整体系间的转换矩阵 $[P]_j$ 是 2×2 阶的，设约束所在处点 C_j 的整体坐标为 $\overrightarrow{OC}_j=x_c\boldsymbol{i}+y_c\boldsymbol{j}$，则相应的反对称矩阵 $[C]_j$ 将简化为行矩阵，即

$$[C]_j=(-y_c\ \ x_c)_{1\times 2} \tag{2.22'}$$

约束转换子阵 $[S]_j$ 成为

$$[S]_j=\begin{pmatrix} [P]_j & \vdots & [0] \\ \cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ (-y_c\ \ x_c)[P]_j & \vdots & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \tag{2.25'}$$

其余的计算均与空间力系的情况相同。

例 2.10 图 1-25a 为曲柄冲床的简图，它由轮 O，连杆 AB 和冲头 B 组成。A、B 两处为铰接，已知 $OA=R, AB=l$。忽略摩擦和物体的自重，设当 OA 在水平位置时冲压力为 P，要求作用在 O 轮上的力偶矩 M 的大小，以及冲头给导轨的侧压力，并要求先列出矩阵形式的平衡方程组。

［解］ 本题是平面力系，每个刚体的平衡方程是 3 个。

（1）先将刚体编号，把冲床看作由三个刚体组成：Ⅰ——O 轮；Ⅱ——连杆 AB，Ⅲ——冲头，见图 a。

（2）再将约束编号，共有 4 个约束：① 轴承 O，② 铰链 A，③ 铰链 B，④ 冲头的导轨，上述几个约束均标于图 a 中。

（3）建立整体直角坐标系 Oxy。原点 O 就是 O 轮中心 O，x 轴和 y 轴方向如图 a。

（4）列出载荷列阵 $\{B\}$，系统上的已知力只有 P，则

$$\{B\}=(0,0,0\ \vdots\ 0,0,0\ \vdots\ 0,-P,0)^T \tag{1}$$

（5）列出约束转换子矩阵 $[S]_j$。

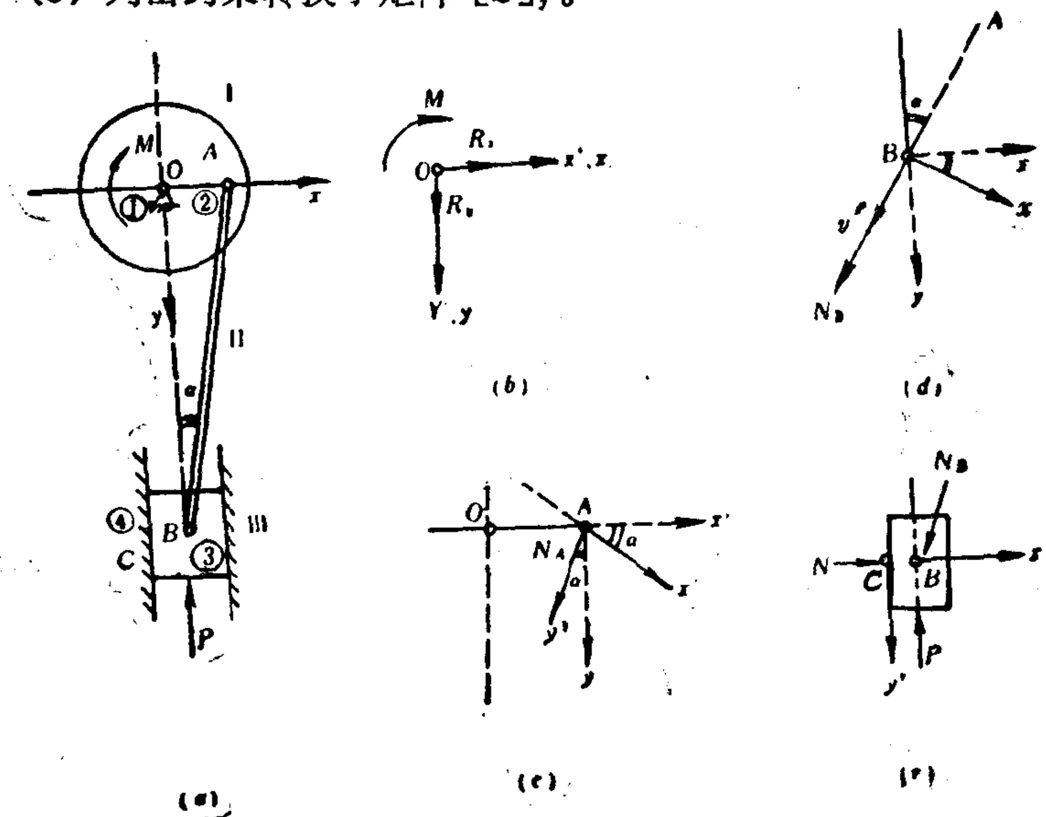


图 2-25

i）先列出局部系与整体系间的转换阵 $[P]_j$。

对于约束①，取局部系 $Ox'y'$ 与体系 Oxy 相重合，见图 b。设轴承对轮子的反力和未知力偶矩 M 组成的约束力系为 $\{R_1\}$，则

$$[P]_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \{R_1\}=(R_x,R_y,M)^T,[C]_1=(0,0)$$

对于约束②，取 $Ax'y'$ 系的 y' 轴与 AB 杆重合，见图 c。设连杆对 A 铰的反力为 $\boldsymbol{N}_A$，则

$$[P]_2=\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$\{R_2\}=(0,N_A,0)^T$$

$$\boldsymbol{OA}=R\boldsymbol{i},\ [C]_2=(0,R)$$

对于约束③，取 $Bx'y'$ 系的 y' 轴沿 AB 杆方向，如图 d。设冲头对连杆的反力为 $\boldsymbol{N}_B$，则

$$[P_3]=\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$\{R_3\}=(0,N_B,0)^T$$

$$\boldsymbol{OB}=l\cos\alpha\boldsymbol{j},\ [C]_3=(-l\cos\alpha,0)$$

对于约束④，取 $Cx'y'$ 系的 x' 轴与 ox 轴相平行，如图 e，设导轨（宽度为 d）对冲头的反力为 $\boldsymbol{N}$，则

$$[P]_4=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\{R_4\}=(N,0,0)$$

$$\overrightarrow{OC}=-\frac{d}{2}\boldsymbol{i}+l\cos\alpha\boldsymbol{j},[C]_4=\left(-l\cos\alpha,-\frac{d}{2}\right)$$

ii）再列出约束转换子阵 $[S]_j$。根据（2.25′）式，现可得：

$$[S]_1=\begin{pmatrix}1&0&\vdots&0\\0&1&\vdots&0\\\cdots&\cdots&\vdots&\cdots\\0&0&\vdots&1\end{pmatrix},\quad [S]_2=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&\vdots&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&\vdots&0\\\cdots&\cdots&\vdots&\cdots\\R\sin\alpha&R\cos\alpha&\vdots&1\end{pmatrix}\tag{2}$$

$$[S]_3=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & \vdots & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & \vdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots \\ -l\cos^2\alpha & l\cos\alpha\sin\alpha & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$[S]_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots \\ -l\cos\alpha & -\dfrac{d}{2} & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

(6) 写出未知约束列阵X为

$$\{X\}=(R_x,R_y,M,N_A,N_B,N)^T \tag{3}$$

(7) 列出约束系数阵的子块A_{ij}。

现有三个刚体($i=1,2,3$),四个约束($j=1,2,3,4$),其中约束①作用于刚体Ⅰ;约束②作用于刚体Ⅰ和Ⅱ,约束③作用于刚体Ⅱ和Ⅲ,约束④作用于刚体Ⅲ。所以有:

$$A_{11}=[T]_1=[S]_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12}=[T]_2=\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ R\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$A_{22}=-[T]_2$$

$$A_{23}=[T]_3=\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ l\cos\alpha\sin\alpha \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$A_{33}=-[T]_3$$

$$A_{34}=[T]_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -l\cos\alpha \end{pmatrix}$$

(8) 列出矩阵平衡方程

$$AX = -B$$

即为

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \\ \\ \text{II} \\ \\ \\ \text{III} \end{array}
\left[\begin{array}{ccc:c:c:c}
1 & 0 & 0 & -\sin\alpha & & \\
0 & 1 & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & R\cos\alpha & & \\
\hdashline
 & & & \sin\alpha & -\sin\alpha & \\
 & 0 & & -\cos\alpha & \cos\alpha & 0 \\
 & & & -R\cos\alpha & l\cos\alpha\ \sin\alpha & \\
\hdashline
 & & & & \sin\alpha & 1 \\
 & 0 & & 0 & -\cos\alpha & 0 \\
 & & & & -l\cos\alpha\ \sin\alpha & -l\cos\alpha
\end{array}\right]_{9\times 6}$$

$$\quad ① \qquad\qquad ② \qquad\qquad ③ \qquad\qquad ④$$

$$\left\{\begin{array}{c} R_x \\ R_y \\ M \\ N_A \\ N_B \\ N \end{array}\right\}_{6\times 1} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ +P \\ 0 \end{array}\right\}_{9\times 1} \qquad (5)$$

由上式可得到 9 个平衡方程式，但考虑到刚体 Ⅱ（AB 杆）是二力杆，只需一个平衡方程，而刚体Ⅲ（冲头）是汇交力系，只需两个平衡方程，所以可在 $[A]$ 阵和 $\{B\}$ 阵中各划去第 5、6、9 三行，则得六阶的矩阵平衡方程为

$$
\begin{array}{c}
\text{I} \\ \\ \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc:c:c:c}
1 & 0 & 0 & -\sin\alpha & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & R\cos\alpha & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & \sin\alpha & -\sin\alpha & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\cos\alpha & 0
\end{array}\right]
$$

$$\text{①} \qquad \text{②} \qquad \text{③} \qquad \text{④}$$

$$
\left\{\begin{array}{c}
R_x \\ R_y \\ M \\ \hdashline N_A \\ \hdashline N_B \\ N
\end{array}\right\}
=
\left\{\begin{array}{c}
0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ \hdashline 0 \\ P
\end{array}\right\}
\tag{9}
$$

(9) 方程的解如下：

$M = PR$（O 轮上的力偶矩）

$N = P\operatorname{tg}\alpha$（导轨对冲头的压力）

$N_A = -P/\cos\alpha$（连杆对轮子作用力，受推）

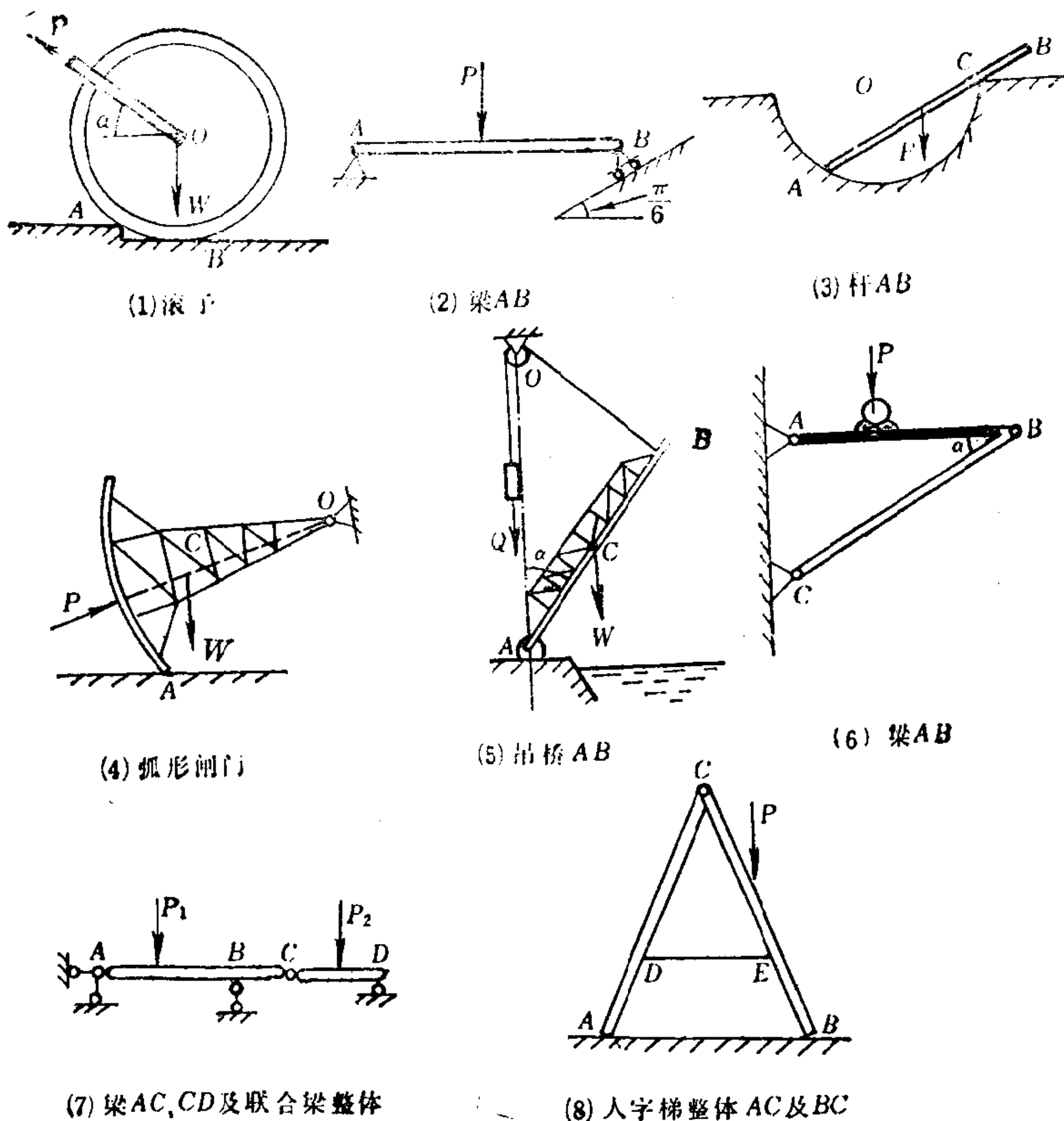
$N_B = -P/\cos\alpha$（冲头对连杆作用力，受压）

$R_x = -P\operatorname{tg}\alpha, R_y = P$（轴承对轮子的作用力）

习　题

2-1　已知空间三个力（大小不为零）对任一点的主矩等于零。证明：这三个力的作用线在同一平面内（提示：在三力的作用线上分别取不在一直线上的三点，先证明三力与此三点决定的平面共面）。由此证明：三力平衡的一个必要条件是三作用线共面。

2-2　作下列指定物体的受力图。物体重量除图上已注明者外，均略去不计。假定接触处都是光滑的，系统处于平衡状态。



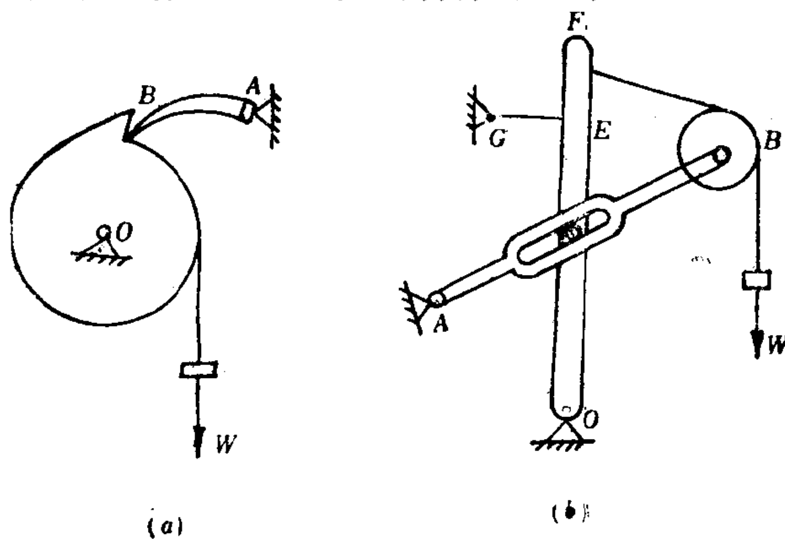
(1) 滚子　(2) 梁AB　(3) 杆AB

(4) 弧形闸门　(5) 吊桥AB　(6) 梁AB

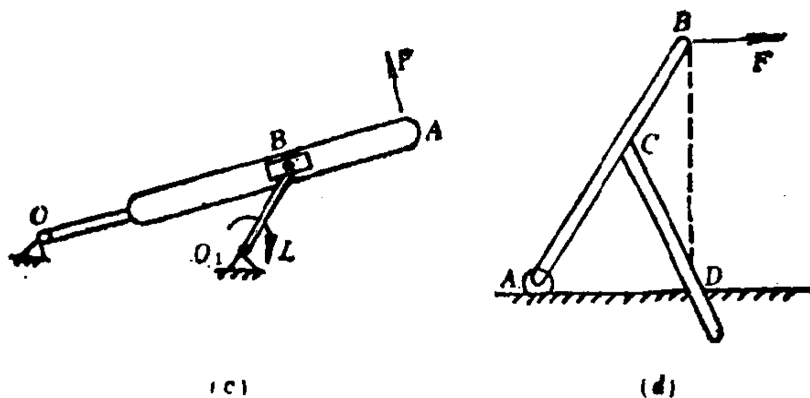
(7) 梁AC、CD及联合梁整体　(8) 人字梯整体、AC及BC

题 2-2 图

2-3　分析下列物体体系中每个物体的受力图，假定所有接触面都是光滑的，其中没有画上重力矢的物体都不计重量。

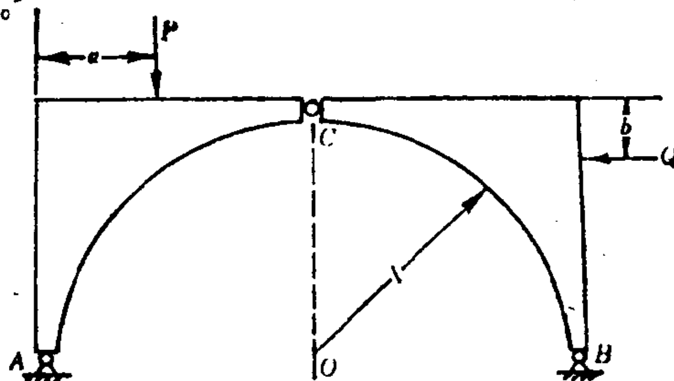


(a)　(b)



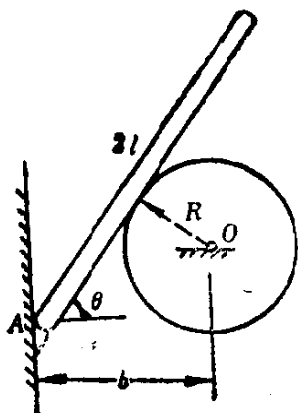
题 2-3 图

2-4 图示为三铰拱的示意图，拱由 AC、BC 两部分用铰链 C 连接，并用铰链 A 与 B 固定于支座上的建筑物（如拱门，拱桥）。如图，今设拱上作用有力 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，不计拱的自重，求 A、B 处的约束力以及 C 处两部分的相互作用力。

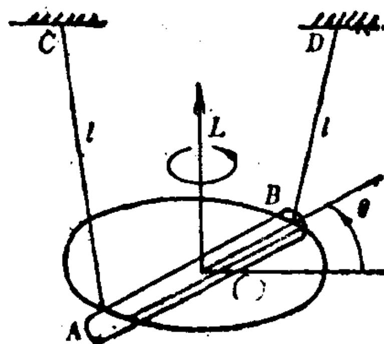


题 2-4 图

2-5 在铅垂墙与固定圆柱间斜放一长为 $2l$ 的均质杆 AB（如



题 2-5 图

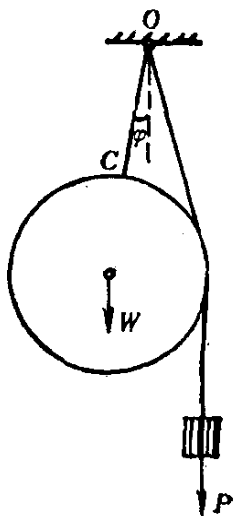


题 2-6 图

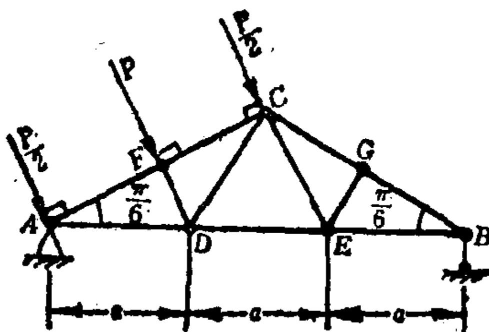
图)，设圆柱半径为 R，圆心 O 到墙面的距离为 b。求证 AB 杆平衡时，杆的水平夹角 θ 满足 $l\cos^3\theta+R\sin\theta-b=0$，假定一切接触都是光滑的。

2-6 均匀杆 AB，长为 $2r$，重为 W，将其两端用长为 l 的两平行绳挂起，悬挂点 C、D 之间的距离也为 $2r$。如在杆上作用一水平面内的力偶(矩为 L)使杆保持平衡，求 L 和杆转过的角度 θ 之间的关系。

2-7 重为 W 的均质圆柱由长为 l 的绳子 OC 悬挂于 O 点，重为 P 的物块也由绳子挂于 O 点。试求系统平衡时(见图) OC 与竖直线的夹角 φ。假定一切接触都是光滑的。



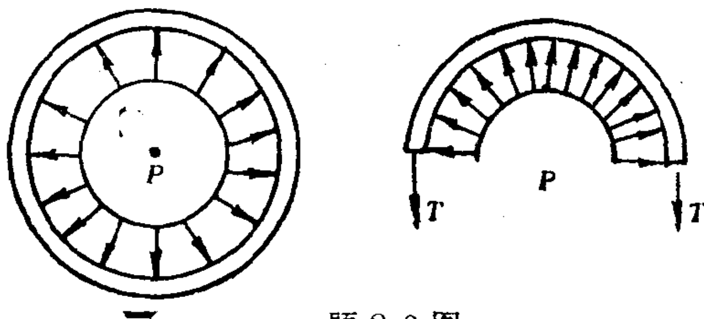
题 2-7 图



题 2-8 图

2-8 试用节点法求图示桁架各杆的内力，载荷及尺寸均如图所示。

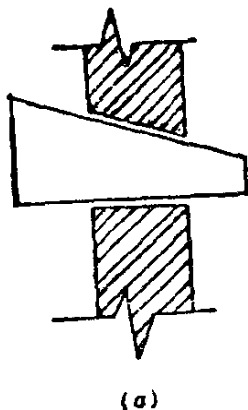
2-9 如图，薄壁圆柱形容器的半径为 a，内压强为 p。求单位长度圆柱壁受到的箍向拉力 T。



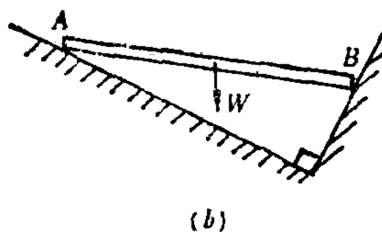
题 2-9 图

2-10　试作出下列各平衡物体的受力图(包括摩擦力)。

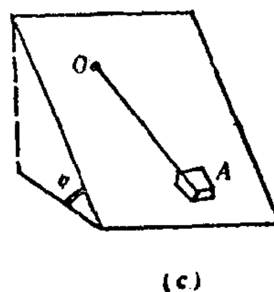
(1) 见图 a，在上、下两段支柱间打入一楔块，楔块与支柱间的摩擦系数为 μ，要防止楔块滑出，且不计楔块自重。



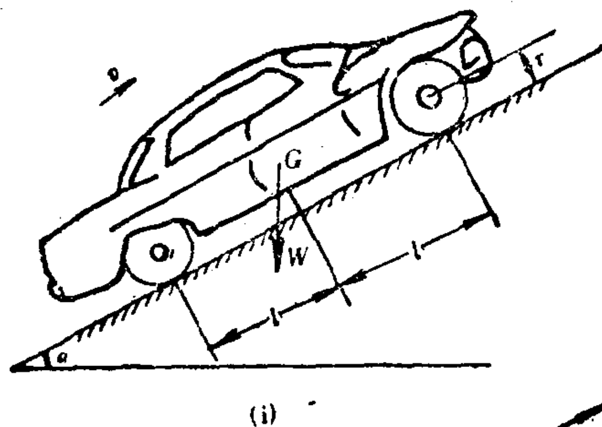
(a)



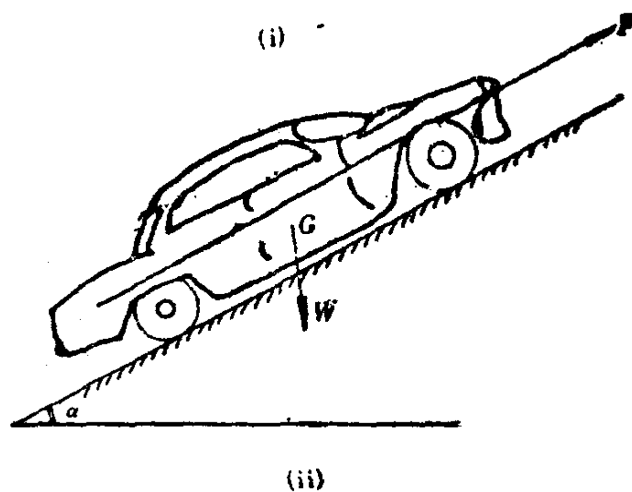
(b)



(c)



(i)



(ii)

(d)

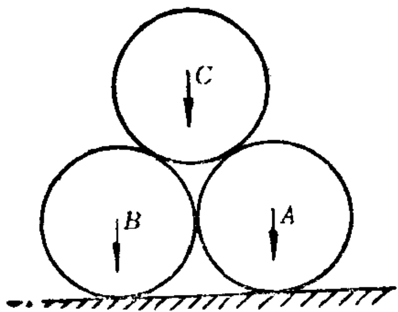
题 2-10 图

（2）见图 b，重为 W 的直杆 AB 放在相互垂直的两平板之间，杆与平板之间有摩擦。

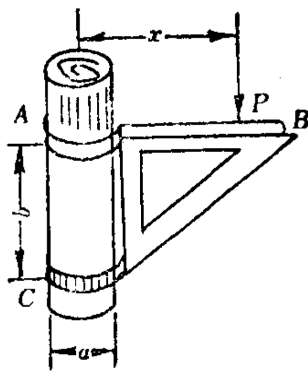
（3）见图 c，小方块 A 放在倾角为 α 的粗糙斜面上，摩擦系数 $\mu=\mathrm{tg}\,\varepsilon$，且 $\varepsilon<\alpha$，方块 A 由一线系于斜面上的固定点 O。

（4）见图 d，汽车（重为 W）在倾角为 α 的倾斜面上匀速行驶，轮子和路面间的静摩擦系数和动摩擦系数分别为 μ_s 和 μ_d，设轮子不打滑，后轮是驱动轮。又如汽车不开动，而用平行于路面的力 $\boldsymbol{F}$ 往上拉，受力图又将如何？

2-11 如图，三个完全相同的均质圆柱叠置于水平面上，三个圆柱的轴线相互平行，设圆柱之间及圆柱与水平面间的摩擦系数均为 μ。求平衡时的最小摩擦系数。



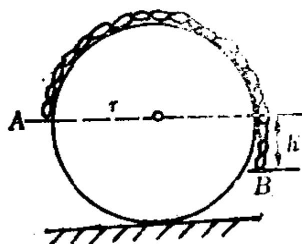
题 2-11 图



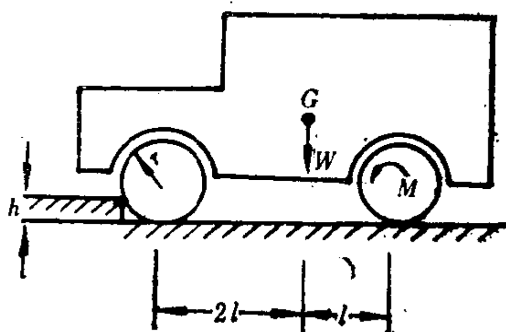
题 2-12 图

2-12 悬臂架的端部 A 和 C 处有一套环，活套在铅垂的圆柱上可以上下移动。如在 AB 上作用铅垂力 $\boldsymbol{P}$，当力 $\boldsymbol{P}$ 离开圆柱较远时，架将被圆柱上的摩擦力卡住而不能移动。设套环与圆柱间的摩擦角皆为 ε，不计架重，求架不致被卡住时，力 $\boldsymbol{P}$ 离开圆柱的最大距离 x。

2-13 一均质链条放在半径为 r 的固定圆柱上，其所在的竖直平面与圆柱轴垂直。设链条的 A 端恰位于水平直径处（图示），另一端 B 的下垂长度为 h，链条与圆柱间的摩擦系数为 μ。求平衡时链条下垂长度 h 的最大值。



题 2-13 图



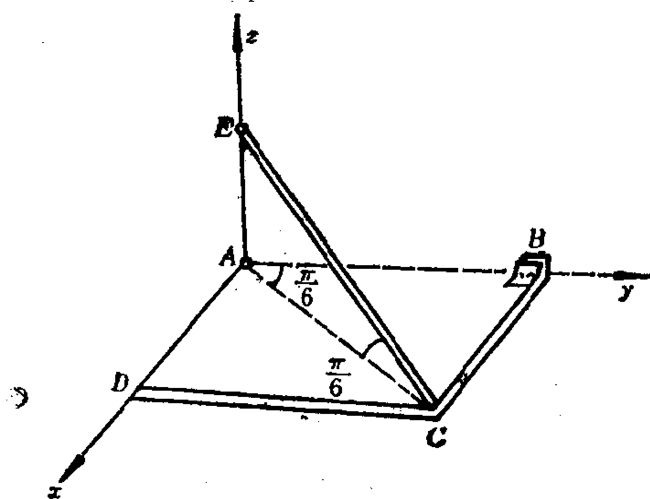
题 2-14 图

2-14　汽车的重量 $W = 14\,\text{kN}$，重心在 G 点，轮子半径 $r = 30\,\text{cm}$。台阶高 $h = 12\,\text{cm}$，图中 $l = 80\,\text{cm}$，汽车由静止起动，不计轮轴的粗细。

（1）欲使前轮爬上台阶，发动机给予后轮的扭矩应多大？

（2）后轮胎与地面之间的静摩擦系数 μ 至少为多大时，后轮才不打滑？

2-15　均质长方形薄板重 $Q = 20\,\text{kg}$，用球铰链 A 和柱铰链 B 固定在墙上（B 铰沿 y 方向不受力），并用绳子 CE 拉住使其维持在水平位置。绳子 CE 缚在薄板上的 C 点并挂在钉子 E 上，钉子钉入墙内，并和 A 点在同一竖直线上，$\angle ECA = \angle BAC = \dfrac{\pi}{6}$。求绳中的张力和支座反力。



题 2-15 图

第三章　牛顿动力学

我们在前面两章中讨论了运动学和静力学，这一部分的其余四章讨论动力学，也就是要分析力和运动之间的关系，从而建立物体机械运动的普遍规律。动力学在科学技术的各个部门(机械、水利、宇宙、航行等等)都有着极其重要的应用，它是本书的主要内容。

通常把经典动力学分为三个部分，即牛顿力学、拉格朗日力学和哈密顿力学。

本章介绍牛顿力学。以牛顿三大定律作为基本出发点的力学称为**牛顿力学**。牛顿力学也可称为矢量力学，因为它的基本数学工具是矢量。牛顿力学的主要内容是研究质点系在三维欧氏空间中的运动。许多重要的力学问题，包括有心力场的运动(人造地球卫星运动可简化成此问题)，都可由牛顿方程完全解出，日常生活领域中的大量力学现象也都可由牛顿理论得到解释。

§3.1　牛顿理论

牛顿运动三定律是牛顿在1687年出版的名著《自然哲学的数学原理》一书中提出的，它是动力学的基础，现在先简单叙述这三条定律，然后再作若干说明。

牛顿第一定律　相对于某个惯性参考系来说，一个物体(质点)如果不受到外力的作用，它将保持静止状态或作匀速直线运动。

牛顿第二定律　当一个物体受到外力作用时，它的加速度的大小和所受合力的大小成正比，而和物体本身的质量成反比，加速度的方向则和所受合力的方向相同。第二定律是牛顿理论的精华。

设质量为m的质点受到n个力$\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$的作用，又设质点的加速度为$\boldsymbol{a}$，则在适当选择单位制后，第二定律的数学表达式是

$$m\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{F} \tag{3.1}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 是作用在质点上的合力。$\boldsymbol{F}$ 可以是质点位置 $\boldsymbol{r}$、速度 $\boldsymbol{v}$ 和时间 t 的函数，即

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$$

但要注意，力 $\boldsymbol{F}$ 不可能是加速度 $\boldsymbol{a}$ 的函数。怎样把实际问题中真实力的规律用足够精确的近似数学式来表达，是我们要学会的技巧之一。下面举几个例子。

万有引力定律可表示为

$$F=-\frac{GM_1M_2}{r^2} \tag{3.2}$$

即在质点 M_1 和 M_2 之间的力正比于这两个质点的质量的乘积而反比于它们之间距离 r 的平方，式中的负号表示为引力。而引力常数 G 的值为

$$G=6.67\times10^{-11}\mathrm{m^3/kg\cdot s^2}$$

特别，对于地面上质量为 m 的物体，受到的地心引力为

$$F=-mg \tag{3.3}$$

这里 g 是重力加速度，$g=9.8\mathrm{m/s^2}$

(3.3) 式适用于在地球表面到大气层顶部之间(约 200 公里)任何一处物体的地球引力，这时可以忽略引力随位置的变化。

另一个常见的力是弹性力，它服从虎克定律，可表示为

$$F=-kx \tag{3.4}$$

其中 k 是弹簧的倔强系数，它与弹簧的材料和形状有关，x 是弹簧由其自然长度算起的伸长量(或压缩量)。

在大量的阻尼运动中摩擦力起着决定性的作用。静摩擦力已在第二章中讨论过。使物体滑移运动减速的动摩擦力规律为

$$f=\mu_m N \tag{3.5}$$

对于给定的一对表面，动摩擦系数 μ_m 要小于静摩擦系数。

物体穿过液体或气体而运动时也有摩擦，当物体速度足够小时，阻尼力近似为

$$f = -cv \tag{3.6}$$

其中 c 为常数；而对于速度较大，但仍属于亚音速时，阻尼力的规律为

$$f = -cv^2 \tag{3.7}$$

当求作用于螺旋桨推进式飞机上的阻力时就可用（3.7）式。跳伞运动员降落时的空气阻力也是平方阻尼。

牛顿第三定律 当两个物体相互作用时，作用力与反作用力同时存在，同时消失；它们的大小相等、方向相反，且沿同一条作用线，但分别作用在不同的物体上。必须指出当质点间的相互作用力是电磁力时，本定律不成立。

为了深入理解牛顿三定律的意义并能正确应用这些定律，必须注意下列各点。

1．空间和时间。

牛顿力学中的空间是三维的欧氏空间，这个空间的度量结构是均匀的和各向同性的。所谓空间是均匀的，即当物体从一个区域移动到空间的另一个区域时，它的物理性质不变。例如一个音叉作平动时，它的固有频率是不变的。所谓空间是各向同性的，是指一个物体在空间内改变取向时，它的几何性质和物理性质不变，因此也称为旋转不变性。例如光速沿各个方向均是相同的。由空间的均匀性和各向同性可知，物体在空间中的位置和方位完全是相对的。

空间的性质与物质和运动无关。这种空间称为“绝对空间”。

牛顿力学中的时间是一维的，而且时间的流逝与空间的性质无关，也与物体的运动无关。这种时间称为“绝对时间”。

我们把具有以上性质的空间和时间称为**伽利略时空结构。**

牛顿力学认为质量是物体的固有性质，它与物体的运动和时间都无关。质量是物体相对于惯性系保持均匀运动趋势的度量。

2．惯性参考系和伽利略相对性原理

在第二定律（(3.1)式）中包含有运动学量——加速度 $\boldsymbol{a}$，它是相对于什么参考系来计算的呢？在第一章运动学中我们说过，参考系可根据解题的方便任意选取。但在动力学中，第二定律并不是对一切参考系都成立。实际上，牛顿第一、第二定律只在惯性参考系中才成立。我们把

牛顿定律不成立的参考系称为非惯性(参考)系。

伽利略相对性原理指明了惯性系的两个重要性质。

(1) 存在无限多个惯性系,它们相互间作均速直线运动。

(2) 在所有瞬时,全部力学规律对一切惯性系都是相同的。

由此可见,不存在一个比其他惯性系更优越的"最佳"惯性系(或称"绝对"惯性系)。

现在要问,怎样来判断一个给定的参考系是否是惯性系呢?如果我们能够知道作用在某物体上的力是 $\boldsymbol{F}$,而且能够找到一个参考系,在其中观察到物体的加速度满足(3.1)式,那么这个参考系就是惯性系。所以严格说来,判定一个参考系是否是惯性系,就取决于能以多大的精度去测出这个参考系的微小的加速度效应。但在实际上,如果对某个参考系中的一个不受任何力和约束作用的物体,没有观察到加速度,那就认为它是一个惯性系。例如,实验表明,当讨论物体在地面附近运动时,对于一般工程问题,地球是一个近似程度相当好的惯性系,牛顿就是在地球上发现了自然界的真实定律!但在精度要求很高的问题中(例如人造卫星的运行轨道),必须考虑地球自转的影响(赤道上任一点的加速度是 3.4cm/s^2,且指向地心),这时就要把地心平动系作为惯性系了。但地心平动系还绕着太阳公转(公转时地心的加速度是 0.6cm/s^2),因此太阳参考系(以太阳为中心,三根轴指向三个恒星)是个精度极高的惯性系(太阳绕银河系中心转动的加速度大约是 $3\times10^{-8}\text{cm/s}^2$ 的数量级,完全可以略去不计)。在本书中,当不作特别说明时,均以地球参考系为惯性系。

顺便指出,牛顿第三定律不论在惯性系或在非惯性系中都是成立的。

3. 牛顿定律的适用范围

牛顿定律的应用在两方面受到限制。首先是物体的运动速度不能太大,即要远远小于光速 c($c=3\times10^{10}\text{cm/s}$),否则就要应用相对论力学。其次是物体不能太小,即牛顿力学只适用于宏观物体。例如对于原子和基本粒子的研究就不能用牛顿力学而要用到量子力学了。但对于通常的工程技术问题,牛顿定律是完全适用的。

4. 牛顿力学的确定性和浑沌现象。

根据第一章质点运动学公式，加速度 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$，式中 $\boldsymbol{r}$ 是质点的矢径，则(3.1)式可写成

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}) \tag{3.8}$$

(3.2)式称为质点动力学方程，或称**质点运动微分方程**。它是二阶常微分方程，若给定力即已知函数 $\boldsymbol{F}$，则由解的存在和唯一性定理，由物体的初始状态，即初位置 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 和初速度 $\boldsymbol{v}(t_0)$ 就可唯一地确定运动规律 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$。这就称为牛顿的**确定性原理**，它对于质点系同样成立。自 1687 年牛顿力学建立以来已有三百年，人们总把牛顿力学与"确定论"相联系，还把它与哲学上的机械论相联系。近年来对某些非线性动力学系统，例如**洛仑茨**（Lorenz）**方程**

$$\begin{cases}\dot{x}=-10x+10y\\ \dot{y}=28x-y-xz\\ \dot{z}=-\dfrac{8}{3}z+xy\end{cases}$$

以及著名的**卡姆(KAM)定理***的研究表明，有的解对初始状态的依赖性特别"敏感"，即初始状态的微小扰动能使系统发生很大的变化，因而从物理上看，得到的解似乎是随机的，这说明在确定性的系统内存在着内在的随机性，研究这一理论的新兴分支称为**浑沌**(chaos)。浑沌理论指出，由牛顿运动微分方程所确定的解的大部分带有随机性。确定和随机，非此即彼的传统观念被浑沌理论的出现冲破了（参阅文献[2]），在经典的牛顿力学中同样存在"不可预测性"。

下面来举例说明牛顿定律的应用。

例 3.1 一群质点在有心力作用下运动，引力中心为 O，力的大小与质点到 O 点的距离成正比。初始时，所有质点分布在一个圆周上

---

* 卡姆(KAM)定理，是三位著名数学家(Kolmogorov，Arnold 和 Moser)第一个字母的合称．KAM 定理是他们在六十年代初完成的．该定理对近乎可积的哈密顿系统的解的性质，给出了重要的结论．参阅文献[3]，[7]．

(其圆心为 O,半径为 R),每个质点初速度的方向都指向该圆周上某固定点 P,而各点初速度的大小与该点到 P 点的距离成正比。求证:在任何时刻,所有质点均位于某个圆周上。

【明证】 本题中的质点群是由无限个质点组成的,但实际上只要证明对任一质点,在任何瞬时它都位于一个与该点初始位置无关的圆周上就可以了,所以本题实际上是个质点动力学问题。

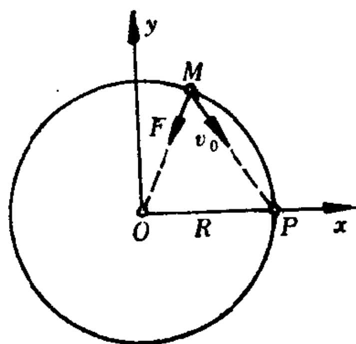


图 3-1

(1) 对象:某一质点 M,它作平面曲线运动(为什么?),现建立直角系 Oxy,以力心 O 为坐标原点,Ox 轴通过定点 P,如图 3-1 所示。设任意时刻 t,M 点的位置为 (x,y)。

(2) 受力分析:质点 M 只受到引力 $\boldsymbol{F}$ 作用,$\boldsymbol{F}=-\omega^2\boldsymbol{r}$,$\omega^2$ 为比例常数,$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$。

(3) 运动方程:由(3.2)式得

$$\begin{cases}\ddot{x}=-\omega^2 x\\ \ddot{y}=-\omega^2 y\end{cases}\tag{1}$$

初始条件为:$t=0$ 时

$$\begin{cases}x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=\beta(R-x_0)\\ y(0)=y_0,\ \dot{y}(0)=-\beta y_0\end{cases}\tag{2}$$

其中 $x_0^2+y_0^2=R^2$;β 是比例常数,$\beta>0$。

由(1)、(2)两式即可解得 M 点的运动规律为

$$\begin{cases}x=x_0\cos\omega t+\dfrac{\beta(R-x_0)}{\omega}\sin\omega t\\ y=y_0\cos\omega t-\dfrac{\beta y_0}{\omega}\sin\omega t\end{cases}\tag{3}$$

消去 x_0 和 y_0,得

$$\left(x-\frac{\beta R}{\omega}\sin\omega t\right)^2+y^2=R^2\left(\cos\omega t-\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t\right)^2\tag{4}$$

这是一个圆周方程,它与 M 点的初始位置无关。　　　　证毕

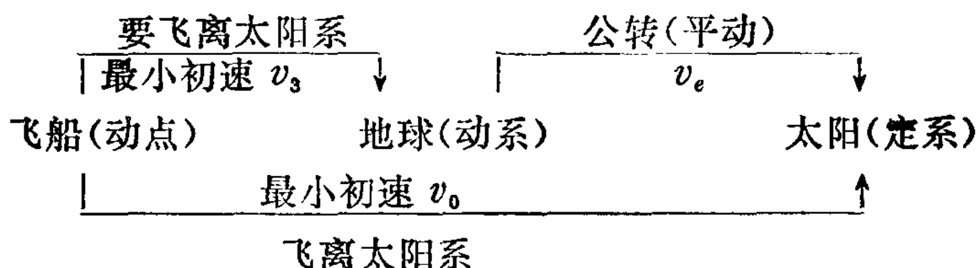
(4) 讨论:若从(3)式中消去 t,则每个质点的轨迹是一椭圆,其方

程为：

$$\frac{1}{R^2}\left(x+\frac{R-x_0}{y_0}y\right)^2+\frac{\omega^2}{R^2\beta^2}\left(x-\frac{x_0}{y_0}y\right)^2=1 \tag{5}$$

例 3.2 第三宇宙速度。从地球上发射一能飞离太阳系的宇宙飞船，该飞船相对于地球的最小速度应为多大？这个速度就称为第三宇宙速度，记作$\boldsymbol{v}_3$。

【解】 建立太阳参考系和地球参考系。设地球绕太阳公转（作平动）的速度为 v_e，飞船相对于太阳的最小发射速度为 v_0，即有



(1) 在太阳参考系中，地球的公转轨道是近似的圆周，其半径为 $\rho_e=1.49\times10^8\text{km}$，所以地球绕太阳公转的速度 v_e 由下式决定：

$$M\frac{v_e^2}{\rho_e}=M\frac{\mu_s}{\rho_e^2}$$

其中 M 是地球质量，μ_s 是太阳引力常数，$\mu_s=1.732\times10^{11}\text{km}^3/\text{s}^2$，解得

$$v_e=\sqrt{\frac{\mu_s}{\rho_e}}=29.793\text{km/s} \tag{1}$$

现先设想，当从地球公转轨道上发射飞船时，若要使飞船脱离太阳系，则其最小初速 v_0 应为多大呢？现飞船在太阳引力下运动，由机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2}mv^2-m\frac{\mu_s}{r}=E \tag{2}$$

其中 m 是飞船质量，v 是飞船对太阳的速度，r 是飞船离太阳中心的距离。现将飞船发射时刻和飞船脱离时刻的 v、r 代入(2)式，得

$$\frac{1}{2}mv_0^2-m\frac{\mu_s}{\rho_e}=0$$

则
$$v_0=\sqrt{2\frac{\mu_s}{\rho_e}}=\sqrt{2}\ v_e=42.13\text{km/s} \tag{3}$$

（2）实际上，飞船是从地球上发射的，因此要考虑地球引力。上面已经求出，当飞船脱离地球引力后，它相对于太阳的速度至少要 v_0 才能飞离太阳系，根据相对速度公式，这时飞船相对于地球的速度是 v_0-v_e（假设飞船发射方向与地球公转速度的方向相同）。在地球参考系中，根据机械能守恒定律，将飞船发射时刻和脱离地球引力时刻的量代入，得

$$\frac{1}{2}mv_3^2-\frac{\mu m}{R}=\frac{1}{2}m(v_0-v_e)^2+0$$

其中 R 是地球半径，μ 是地球引力常数，于是解得

$$v_3=16.65\doteq16.7\text{km/s} \tag{4}$$

这就是第三宇宙速度。美国于 1977 年秋发射的“旅行者-1”号和“旅行者-2”号飞船都将飞离太阳系，其飞船轨迹可见图 3-2 。“旅行者 -1”号飞船完成了飞往木星和土星的使命，已经飞离太阳系。“旅行者-2”号正在飞向天王星，还将“访问”冥王星，然后飞离太阳系，遨游太空。“旅行者 - 2”号飞船利用了飞近木星时的巨大引力使飞船加速，近似计算表明，采用这种加速式的轨道，使飞到天王星的时间由 16 年减少到大约 5 年。

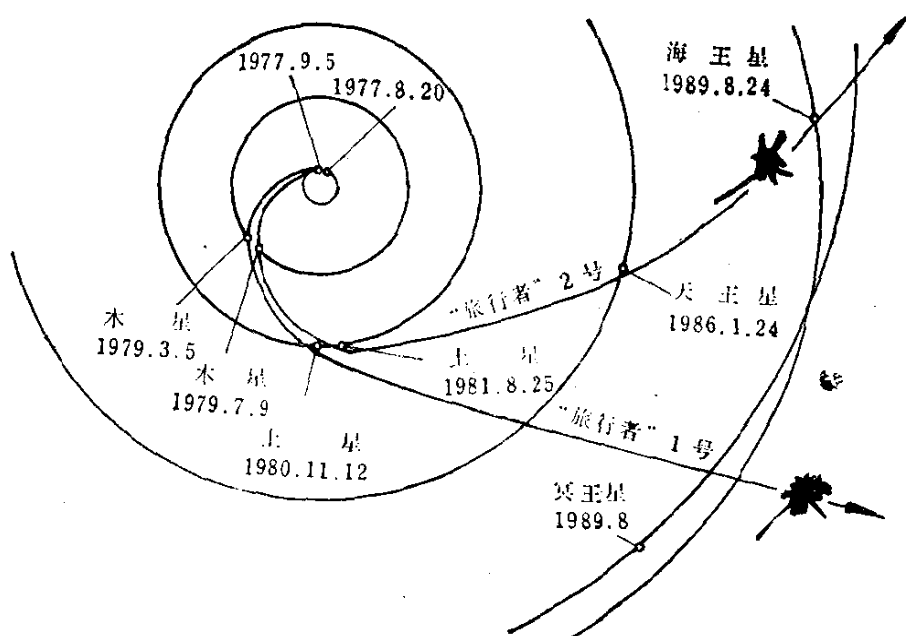


图 3-2

§3.2 基本概念

实际物体不一定都可简化为质点，有时系统本身是个物体系，这时就要讨论刚体或更一般的质点系的动力学问题。

凡由有限或无限个相互联系的质点所组成的系统称为**质点系**。原则上说，要求解质点系动力学问题，只要对质点系中的每一个质点分别列出牛顿运动微分方程，然后解此微分方程组，就可以得到每个质点的运动规律，整个质点系的动力学问题也就彻底解决了。但这在实际上是行不通的，也是不必要的。首先，质点系中所有其他质点对某个质点的作用力通常是未知的，而且表达式又非常复杂（依赖于各点的位置和运动状态），因此不易写出每个质点的微分方程；其次，质点系中质点的数目可能非常大甚至是无限的（例如刚体或某部分液体），这样多又复杂的联立微分方程组是难以求解的；第三，大多数情况下，我们并不需要了解每个质点的具体运动情况，而只要知道某些整体运动的特征。例如，在开山填沟的定向爆破问题中，我们不必知道每个石块抛落的地方，而只要知道其质心的运动轨迹，就可知道大部分石块将落于何处。

为了描述质点系动力学问题，常要用到几个整体物理量，如动量、动量矩、功和能量以及三个相应的定理：动量定理、动量矩定理和动能定理。由于这三个定理对于刚体、弹性变形体、流体等一切质点系都是普遍成立的，因此统称为**质点系普遍定理**。它们就是牛顿定律对质点系的推广。

在介绍普遍定理之前，先介绍一些基本概念。

1. 内力和外力

对于质点系中的每个质点，可把作用在它上面的全部力分为内力和外力两类。质点系中各质点间的相互作用力，称为**内力**；质点系以外的物体对质点系内质点的作用力，称为**外力**。外力和内力的区分完全取决于质点系范围的划定。不受任何外力作用的质点系称为**孤立质点系**（也称为封闭系统），太阳系就是近似的孤立质点系。

2．动量及其计算

动量是描述质点系平动性质的物理量。对于一个质点系，各个质点的动量(质量与速度的乘积)之矢量和，称为质点系的(总)**动量**，记作 $\boldsymbol{P}$,即

$$\boldsymbol{P}=\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i \tag{3.9}$$

其中 $\boldsymbol{v}_i$ 是第 i 个质点相对于某个参考系的速度。动量的量纲是:[动量]=[质量][长度][时间]$^{-1}$,在 SI 制中,动量的常用单位是 kg·m/s 等。

因 $\boldsymbol{v}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_i$， 由质心的定义可得

$$\boldsymbol{P}=M\boldsymbol{v}_G \tag{3.10}$$

上式表示：质点系的总动量等于系统的(总)质量与质心速度矢量的乘积。

由(3.10)式可以方便地求出质点系的动量。例如一个匀质圆盘绕过盘心 G 的固定轴旋转,则不论转速是否均匀,圆盘的动量均为 $\boldsymbol{P}=0$。

3．动量矩及其计算

动量矩是描述质点系转动性质的物理量。所谓质点系关于某点 O 的动量矩,就是各个质点对 O 点的动量矩之矢量和,记作 $\boldsymbol{H}_0$，即

$$\boldsymbol{H}_0=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i) \tag{3.11}$$

显然,质点系的动量矩 $\boldsymbol{H}_0$ 是与 O 点的选择有关的,O 点可称为矩心。

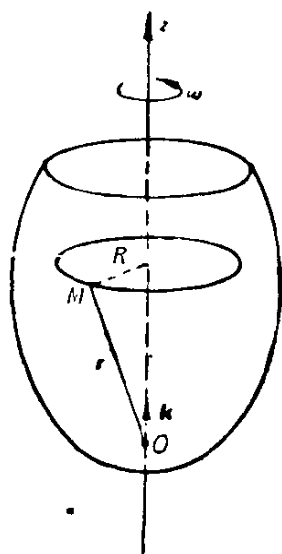


图 3-3

动量矩的量纲是

[动量矩]=[质量][长度]^2[时间]$^{-1}$

在 SI 制中,动量矩的常用单位是 kg·m^2/s 等。

质点系动量矩的计算要比动量复杂得多。下面我们导出刚体绕定轴转动时的动量矩计算公式。

设刚体绕固定轴 Oz 转动，角速度为 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$ (图3-3)，刚体关于z 轴的动量矩$H_z=\boldsymbol{H}_0\cdot\boldsymbol{k}$ 为

$$H_z=\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i\right)\cdot\boldsymbol{k}$$

$$=\left[\sum\boldsymbol{r}_i\times m_i(\omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}_i)\right]\cdot\boldsymbol{k}$$

$$= \sum \omega [\boldsymbol{r}_i^2 - (\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{k})^2] m_i$$

$$= \omega \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$\sum\limits_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2) = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2) \mathrm{d}m$ 是刚体关于 z 轴的转动惯量，记作 J_z，则定轴转动的刚体关于其转轴 z 的动量矩为

$$H_z = J_z \omega \tag{3.12}$$

关于转动惯量的计算，主要是积分运算。常见的几种均质物体的转动惯量公式见表 3.1 。计算转动惯量时常要用到平行移轴定理（或称**惠更斯原理**）：刚体关于任一轴 z 的转动惯量 J_z，等于刚体对于过质心G 的平行轴的转动惯量 J_G 加上刚体的质量 M 与两轴之间距离平方 d^2 的乘积，即

$$J_z = J_G + Md^2 \tag{3.13}$$

表 3.1

细杆	圆盘或圆柱
$J_z = \frac{1}{12} M l^2$	$J_z = \frac{1}{2} M R^2$
实心球	**薄圆盘**
$J_z = \frac{2}{5} M R^2$	$J_z = \frac{1}{4} M R^2$

由于质点系的动量矩依赖于矩心 O 的选取，所以改变矩心时，动量矩也将改变。现取质点系的质心 G 为新的矩心，则质点系对质心 G 的动量矩为

$$\boldsymbol{H}_G=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i'\times m_i\boldsymbol{v}_i') \tag{3.14}$$

其中 $\boldsymbol{r}_i'$ 和 $\boldsymbol{v}_i'$ 分别为在质心平动系 $Gx'y'z'$ 中第 i 个质点的矢径和速度，如图 3-4 所示，且有

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{OG}+\boldsymbol{r}_i',\quad \boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_G+\boldsymbol{v}_i' \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

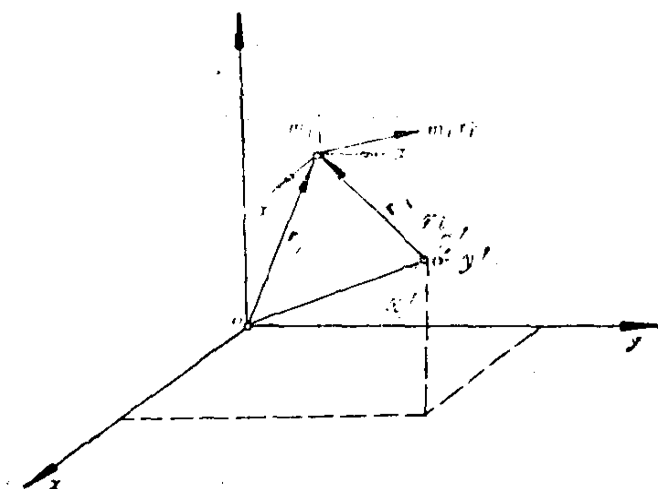


图 3-4

由(3.11)式，并利用 $\sum m_i\boldsymbol{r}_i'=0$，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_0&=\sum_i(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum_i[(\boldsymbol{OG}+\boldsymbol{r}_i')\times m_i(\boldsymbol{v}_G+\boldsymbol{v}_i')]\\&=\boldsymbol{OG}\times M\boldsymbol{v}_G+\sum_i(\boldsymbol{r}_i'\times m_i\boldsymbol{v}_i')\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{H}_G+\boldsymbol{OG}\times M\boldsymbol{v}_G \tag{3.15}$$

4. 功和能

设力 $\boldsymbol{F}$ 作用于物体上的某点，该点的矢径为 $\boldsymbol{r}$，则力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所作的**元功**为

$$\widetilde{\mathrm{d}}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{3.16}$$

这里 $\widetilde{\mathrm{d}}W$ 表示它不一定是某个函数的全微分，必须注意，(3.16)式只适

用于力的作用点始终不变的情形。有时力的作用点是不断改变的（例如圆轮在直线轨道上作无滑动的滚动时，轨道对轮子的摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 的作用点就不是轮子上的固定点），这时可将元功定义为

$$\tilde{\mathrm{d}}W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t \tag{3.17}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是物体上受力点的瞬时速度。显然，(3.17)式包含了(3.16)式。

当力的作用点沿任一曲线 AB 运动时，力 $\boldsymbol{F}$ 的总功为

$$W_{AB} = \int_{AB} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{3.18}$$

上式右端是第二类曲线积分。一般说来，W_{AB} 与积分路径有关。功的量纲是[功] = [质量][长度]^2[时间]$^{-2}$。功的常用单位是J，而且已知 $1\mathrm{J} = 1\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$。

例 3.3 外力对定轴转动刚体所作的功。设刚体上作用有外力系 $\boldsymbol{F}_i$ $(i = 1,2,\cdots,n)$，其力的作用点分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$。若已知刚体的瞬时角速度为 $\omega = \dot{\varphi}$，φ 为转角，试求总元功的表达式。

【解】 由于刚体内力作功之和为零，所以只要计算外力对刚体所作的功。

设刚体绕 Oz 轴转动，由(3.17)式，总元功为

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{d}}W &= \sum \boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{v}_i\mathrm{d}t = \sum \boldsymbol{F}_i\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\mathrm{d}t \\ &= \sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i)\cdot\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}t \\ &= L_z\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

其中 L_z 是外力系对 Oz 轴的矩，而 $\mathrm{d}\varphi$ 是刚体的角位移。

回到功的表达式(3.17)，如果力 $\boldsymbol{F}$ 沿路径 AB 所作的功 W 与路径无关，则称 $\boldsymbol{F}$ 是**保守力**。这时存在单值的可微函数 $U(x,y,z)$，使

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} U \tag{3.19}$$

称 $U(x,y,z)$ 为**势能**（函数），它只与位置有关。这时力 $\boldsymbol{F}$ 的功可表示为

$$W_{AB} = \int_{AB} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{AB} -\operatorname{grad} U\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_A^B \mathrm{d}U = U_A - U_B \tag{3.20}$$

其中 U_A 和 U_B 分别是势能在 A 点和 B 点的值。(3.20)式表明：保守力（也称**有势力**）所作的功等于起点和终点的势能之差。由于势能函数是标量，计算起来比较方便。

质点系的势能，就是每个质点势能的总和。几种常见的保守力场的势能函数如下：

（1）重力场。取 Oxy 为零势能面(垂直于重力)，则质点系的重力势能为

$$U = Mgz_G$$

其中 M 是物体系的总质量，z_G 是物体系的质心的高度坐标。

（2）万有引力场。取无穷远处的势能为零，则

$$U = -\frac{\gamma m}{r}$$

其中 γ 为引力常数，m 为质点的质量，而 r 是质点到固定引力中心的距离。

（3）弹性力场。设弹簧的倔强系数为 k，取弹簧原长（自然长度）时的势能为零，当弹簧较原长的伸长量或压缩量为 λ 时，有

$$U = \frac{k}{2}\lambda^2$$

可见弹性势能总是正的。

动能 动能也是物体作功能力的一种度量，它是个标量，而且永远是正值，它的量纲和功相同。

质点系的动能是各个质点的动能之和，即

$$T = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i^2 \tag{3.21}$$

其中 m_i 和 $\boldsymbol{v}_i$ 分别是第 i 个($i=1,2,\cdots,n$)质点的质量和速度。

动能的计算是十分重要的，特别在拉氏力学中更是必不可少的。因此，我们要能熟练地写出系统动能的正确表达式。在计算质点系动能时，常用到下述定理：

寇尼希定理 质点系的动能等于系统的质量全部集中在质心时质心的动能，加上相对于质心平动系的动能。即

$$T = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\sum m_i\boldsymbol{v}'^2_i \tag{3.22}$$

其中 $\boldsymbol{v}_G$ 是质心的速度，$\boldsymbol{v}'_i$ 是质点相对于质心平动系的速度。

【证】 由速度合成公式，有

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_G+\boldsymbol{v}_i'$$

所以

$$\boldsymbol{v}_i^2=\boldsymbol{v}_G^2+2\boldsymbol{v}_G\cdot\boldsymbol{v}_i'+\boldsymbol{v}_i'^2$$

质点系的动能为

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\sum m_i\boldsymbol{v}_i^2\\&=\frac{1}{2}\sum m_i\boldsymbol{v}_G^2+(\sum m_i\boldsymbol{v}_i')\cdot\boldsymbol{v}_G+\frac{1}{2}\sum m_i\boldsymbol{v}_i'^2\end{aligned}$$

因为 $\sum m_i\boldsymbol{v}_i'=0$（为什么？），而 $\frac{1}{2}\sum m_i\boldsymbol{v}_i'^2$ 就是质点系相对于质心平动系的动能。令 $M=\sum m_i$ 为总质量，即得(3.22)式。 证毕

根据动能的定义和寇尼希定理容易算得刚体的动能公式如下：

(1) 刚体作平动时

$$T=\frac{1}{2}Mv^2 \tag{3.23}$$

其中 M 是刚体的总质量，$\boldsymbol{v}$ 是刚体上任一点的速度。

(2) 刚体以角速度 ω 绕固定轴 z 转动时

$$T=\frac{1}{2}J_z\omega^2 \tag{3.24}$$

其中 J_z 是刚体关于 z 轴的转动惯量。

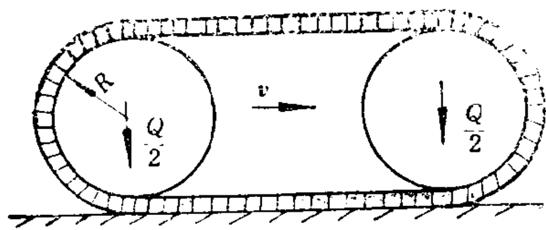
(3) 刚体作平面平行运动时

$$T=\frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_G^2+\frac{1}{2}J_G\omega^2 \tag{3.25}$$

其中 M 是总质量，$\boldsymbol{v}_G$ 是质心速度，而 J_G 是刚体关于通过质心 G 并与运动平面相垂直的轴的转动惯量。

关于刚体作定点运动时的动能公式将在第五章中导出。

例 3.4 设坦克以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿直线前进，试求履带及两轮（如图3-5）的动能，设履带是均质的，重为 w，而两个轮子均可看作半径为 R、重为 $Q/2$ 的均质圆盘。



(a)

图 3-5

【解】 取质点系包括一条履带和两个轮子，由(3.25)式，可分别求得每个轮子的动能为

$$T_1=\frac{1}{2}\frac{Q}{2g}v^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{Q}{2g}R^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$=\frac{3}{8}\frac{Q}{g}v^2$$

履带不是刚体，将其作为一个质点系，可直接用寇尼希定理，因为由履带的质心平动系看来，履带各点的速率均为 v，所以由(3.22)式得履带的动能为

$$T_2=\frac{1}{2}\frac{w}{g}v^2+\frac{1}{2}\frac{w}{g}v^2=\frac{w}{g}v^2$$

则总动能为

$$T=2T_1+T_2=\frac{1}{4}\frac{3Q+4w}{g}v^2$$

§3.3 质点系动力学普遍定理

这一节里，我们要把牛顿动力学方程推广到质点系，并导出三个普遍定理。这些定理不仅是数学运算的推论，而且具有独立的物理意义，有些定理本来就是从实践中归纳出来的，是描述某些运动规律的力学定律。由于普遍定理是从牛顿第二定律导出的，所以它们都只在惯性参考系中成立。

1．动量定理和质心运动定理

为了把牛顿定律推广到质点系(设共有 n 个质点组成)，先对系统中的每个质点 i 都列出其动力学方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\boldsymbol{v}_i)$$

$$=\boldsymbol{F}_i^{(e)}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\boldsymbol{f}_{ij},\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.26}$$

其中 $\boldsymbol{F}_i^{(e)}$ 是作用在第 i 个质点上的外力，而 $\boldsymbol{f}_{ij}$ 是系统内第 j 个质点 $(j\neq i)$ 对它的作用力（内力)。将(3.26)式对 i 从 1 到 n 求和，并考虑到内力的矢量和为零，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum\boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

现令 $\boldsymbol{F}^e=\sum\boldsymbol{F}_i^{(e)}$，它是质点系上所有外力的主矢，则上式成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{F}^e \tag{3.27}$$

这就是**质点系动量定理**，它表示质点系动量对时间的导数等于外力的主矢。

如将计算动量的公式(3.10)代入动量定理(3.27)式，就得到动量定理的另一种形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\boldsymbol{v}_G)=\boldsymbol{F}^e \tag{3.28}$$

上式表明：质点系质心的运动相当于这样一个质点的运动，即它的质量等于质点系的总质量 M，而它受到的力是质点系外力的主矢 $\boldsymbol{F}^e$，所以(3.28)式又称为**质心运动定理**。

(3.27)式和(3.28)式表明，当使用动量定理或质心运动定理时，可不考虑系统的内力，这就大大简化了受力分析。

这里强调指出的是，动量定理和质心运动定理只对惯性系成立，因此当计算质点系的动量时，各点的速度 $\boldsymbol{v}_i$（或质心速度 $\boldsymbol{v}_G$）必须是绝对速度(在动力学中我们常把惯性系取作“定系”)。在非惯性系中，虽然动量 $\boldsymbol{P}$ 也按(3.10)式计算，但(3.27)式就不成立了。

例 3.5 长为 l 的均质细链（单位长度的质量为 γ）堆放在地面上，现用手将其一端以匀速 v 竖直向上提起（如图3-6），试求任意时刻手的提力 $F(t)$ 及地面的反力 $N(t)$。假设链条由许多小环连接而成，因此地面上的链条与提起的链条之间没有力作用。

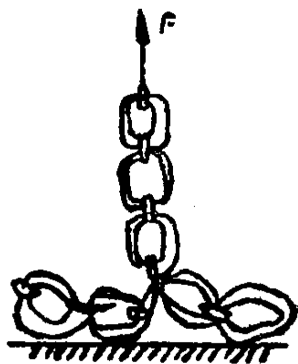


图 3-6

【解】 由于链条小环间不是刚性约束，所以链条不是刚体，因此，可将链条看作一个质点系来求解。

首先，对全部链条来说，在任意时刻 t，被提起部分的链条的质量为 γvt，地面上部分链条的质量为 $(l-vt)\gamma$。链条的外力有：重力 γlg，提力 F，地面反力 N。总动量为

$$P=\sum m_i v_i=(\gamma vt)v+0=\gamma v^2 t$$

由动量定理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma v^2 t)=-\gamma lg+F+N \tag{1}$$

其次，对地面上的链条来说，它处于静止状态，它所受到的力（外力）有：重力 $(l-vt)\gamma g$，地面反力 N。这时平衡方程为

$$(l-vt)\gamma g=N(t) \tag{2}$$

最后，将(2)式代入(1)式，即得

$$F(t)=\gamma v(v+gt) \tag{3}$$

例 3.6 弯管的动反力。水流流经变截面弯管（图 3-7a），设流体

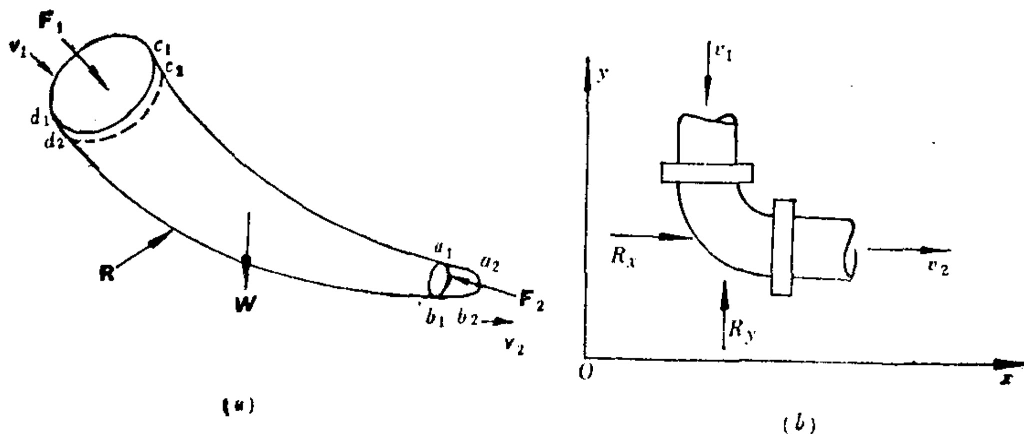


图 3-7

是不可压缩的，流动是定常的（管内每一点处液体的速度不随时间变化）。单位时间内流过截面的体积流量为 Q，密度为 ρ。管子截面积是 $A(x)$。求由于流体的流动对管壁产生的压力。

【解】 本题是已知运动求力。在管子中取一段液体 $c_1d_1a_1b_1$ 作为质点系。设在 t 时刻，这些液体的总动量是 $\boldsymbol{p}_1$，而在 $t+\Delta t$ 时刻，这些液体占据的位置为 $c_2d_2a_2b_2$ 段，其总动量是 $\boldsymbol{p}_2$。在这个时间间隔内，流过截面的液体质量为 $m=\rho Q\mathrm{d}t$。

在 Δt 时间内，质点系动量的变化为

$$\Delta\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=[\boldsymbol{p}_2(c_2d_2b_1a_1)+\boldsymbol{p}_2(a_1b_1b_2a_2)]$$
$$-[\boldsymbol{p}_1(c_1d_1d_2c_2)+\boldsymbol{p}_1(c_2d_2b_1a_1)]$$

因管内流动是定常的，有 $\boldsymbol{p}_2(c_2d_2b_1a_1)=\boldsymbol{p}_1(c_2d_2b_1a_1)$，所以

$$\Delta\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}_2(a_1b_1b_2a_2)-\boldsymbol{p}_1(c_1d_1d_2c_2)$$

当 Δt 很小时，可认为在 $c_1d_1d_2c_2$ 中各质点的速度相同，设为 $\boldsymbol{v}_1$，而在 $a_1b_1b_2a_2$ 中各点的速度也相同，设为 $\boldsymbol{v}_2$。则

$$\Delta\boldsymbol{P}=\rho Qdt(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)\tag{1}$$

作用于质点系上的外力有：均布于 $c_1d_1b_1a_1$ 内的重力 $\boldsymbol{W}$，管壁对质点系的作用力 $\boldsymbol{R}$，以及截面 c_1d_1 和 a_1b_1 上受到的相邻液体的压力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$（见图 a）。

由质点系的动量定理得

$$\rho Q\Delta t(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)=(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{R})\Delta t$$

即

$$\rho Q(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{W}+\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{R}\tag{2}$$

将管壁对流体的反力分为两部分：静反力 $\boldsymbol{R}'$（不考虑流体的动量变化），及由于流体动量变化而产生的附加动反力 $\boldsymbol{R}''$。于是应有

$$\boldsymbol{W}+\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{R}'=0\tag{3}$$

$$\boldsymbol{R}''=\rho Q(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)\tag{4}$$

设截面 c_1d_1 和 a_1b_1 的面积分别为 A_1 和 A_2，则由不可压流体的连续性方程，有

$$Q=A_1v_1=A_2v_2\tag{5}$$

因此只要已知流速和曲管的尺寸，即可求得附加动反力，而液体对

管壁的附加动压力可根据反作用定律确定。

例如，图 b 为一水平放置的等截面直角形弯管。当流体流经弯管被迫改变流动方向时，就要对管壁施加附加的动压力，其大小就是管壁对流体作用的附加动反力，即

$$\begin{cases} R_x'' = \rho Q(v_2 - 0) = \rho A_2 v_2^2 \\ R_y'' = \rho Q(0 + v_1) = \rho A_1 v_1^2 \end{cases} \tag{6}$$

因此，当流速很高或管子截面积很大时，附加动压力很大，这时，在管子的弯头处必须安装支座。

2. 质点系动量矩定理

一般说来，动量定理描述了质点系平动运动的力学规律，而对于转动问题就要应用动量矩定理了。因为动量矩的计算是依赖于矩心的，所以动量矩定理对不同的矩心具有不同的形式，因此，使用时要特别注意。

在惯性参考系里取固定点 O，对质点系中的第 i 个质点列出其动力学方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i \boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \boldsymbol{f}_{ij}$$

在等式两边用矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 矢乘，注意到左端为

$$\boldsymbol{r}_i \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i \boldsymbol{v}_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i)$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \boldsymbol{r}_i \times \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \boldsymbol{f}_{ij}$$

将上式对 i 从 1 到 n 求和，并利用质点系动量矩的定义(3.11)式，即得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_O = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum_{i} \sum_{j\neq i} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{ij}$$

上式右端第一项是所有外力对 O 点的主矩，记作 $\boldsymbol{L}_O$；右端第二项是全部内力对 O 点的主矩，应等于零。因此有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{L}_O \tag{3.29}$$

上式表明：质点系对于某定点 O 的动量矩对时间的导数，等于作用在质点系的外力系对 O 点的主矩。这就是**质点系动量矩定理**。

在应用(3.29)式时，常取其在定系 $Oxyz$ 中的投影式：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_x = L_{ox} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_y = L_{oy} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_z = L_{oz} \end{cases} \tag{3.30}$$

由动量矩定理可知：质点系的内力不能改变质点系的动量矩，只有作用于质点系的外力才能使其动量矩发生变化。

(3.29)式只适用于惯性参考系的固定点 O，当刚体作平面运动或一般运动时，使用起来不方便，为此需推导相对于质心的动量矩定理。

设 G 为质点系的质心，$\boldsymbol{H}_G$ 为质心平动系中质点系对质心的动量矩，则有

$$\boldsymbol{H}_G = \sum \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i = \sum \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

其中 $\boldsymbol{r}'_i$ 和 $\boldsymbol{v}'_i$ 分别是第 i 个质点在质心平动系中的矢径和速度，而 $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{v}'_i$，由(3.15)式

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{H}_G + \boldsymbol{OG} \times M\boldsymbol{v}_G$$

将上式代入(3.29)式，并注意到(3.28)式，即得

$$\boldsymbol{L}_O = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{OG} \times M\dot{\boldsymbol{v}}_G = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{OG} \times \boldsymbol{F}^{(e)} \tag{3.31}$$

注意到

$$\boldsymbol{L}_O = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$
$$\boldsymbol{F}^{(e)} = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$
$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{OG} + \boldsymbol{r}'_i$$
$$\boldsymbol{L}_G = \sum \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

其中 $\boldsymbol{r}'_i$ 是第 i 个质点在质心平动系中的矢径。于是由(3.31)式即得**相对于质心的动量矩定理**：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{L}_G \tag{3.32}$$

它在形式上与质点系相对于惯性参考系的动量矩定理(3.29)式完全类似。

3. 刚体平面运动的动力学方程

由运动学知，如取质心为基点，则刚体作平面运动时，可将其运动分解为随质心的平动和绕质心的转动两部分。

设作用在刚体上的外力系可向质心所在的平面简化，简化的结果为一平面力系 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$，这样就可以用质心运动定理来描述刚体随质心 G 的平动，再用相对于质心的动量矩定理描述刚体绕质心 G 的转动，即

$$\begin{cases} M\boldsymbol{a}_G = \sum \boldsymbol{F}^{(e)} \\ J_{Gz}\varepsilon = L_G \end{cases} \tag{3.33}$$

其中 Gz 轴通过质心 G，且与刚体运动的平面相垂直。

(3.33)式就称为刚体的**平面运动动力学方程**。在应用时常取其在固定系 $oxyz$ 中的投影式，即

$$\begin{cases} M\ddot{x}_G = \sum F_x^{(e)} \\ M\ddot{y}_G = \sum F_y^{(e)} \\ J_{Gz}\dot{\omega} = L_{Gz} \end{cases} \tag{3.34}$$

式中的 ω 是刚体的角速度，而 ε 是角加速度。

当已知质心运动轨迹时，可将质心运动定理(3.33)式在自然系中投影，见例 3.7。

例 3.7 半径为 r、重为 W 的均质圆柱体，在半径为 R 的粗糙圆柱形槽内作无滑动的滚动。初始时，圆槽中心 O 与圆柱中心的连线 OG 与铅垂线的夹角为 α，见图 3-8 *a*。试求当圆柱到达最低位置时，圆槽的正压力 N 和接触点处的静摩擦力 f。

【解】 (1) 对象：圆柱体在铅垂面内作平面运动。质心 G 的轨迹是圆周(以 O 为圆心，R、r 为半径)。

(2) 外力：圆柱体在任意位置时的受力图如图 *b* 所示，它受到

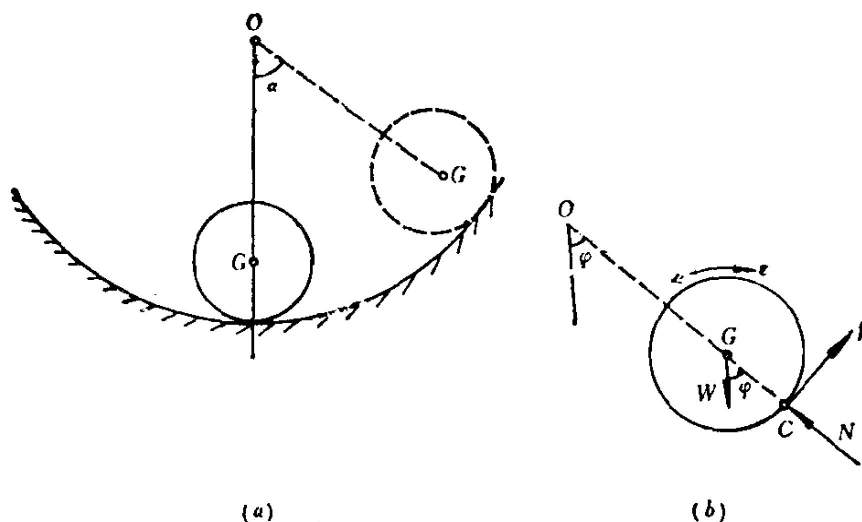


图 3-8

重力 $\boldsymbol{W}$、C 点处的正压力 N 和静摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 的作用。

(3) 平面运动动力学方程(在自然系投影)为

$$\begin{cases} M\ (R-r)\ddot{\varphi}=f-W\sin\varphi & (1)\\ M\ (R-r)\dot{\varphi}^2=N-W\cos\varphi & (2)\\ J_{Gz}\varepsilon=rf & (3)\end{cases}$$

运动学关系式为

$$(R-r)\dot{\varphi}=v_G=-r\omega \qquad (4)$$

由以上(4)式、(3)式和(1)式可解得

$$\begin{cases} \varepsilon=\dot{\omega}=-\dfrac{R-r}{r}\ddot{\varphi} \\ \ddot{\varphi}=\dfrac{-2g}{3(R-r)}\sin\varphi \end{cases} \qquad (5)$$

将(6)式关于 φ 积分,得 (6)

$$\dot{\varphi}^2=\frac{4}{3}\frac{g}{(R-r)}(\cos\varphi-\cos\alpha) \qquad (7)$$

设 τ 时刻,圆柱体到达最低位置, $\varphi=0$, 则可解得

$$\begin{cases} \varepsilon(\tau)=0 & (8)\\ \dot{\varphi}^2(\tau)=\dfrac{4g}{3(R-r)}(1-\cos\alpha) & (9)\end{cases}$$

(4) 求摩擦力 f。将(8)式代入(3)式,即得

$$f(\tau)=0 \tag{10}$$

其实,因圆柱体在最低位置时, C 点无滑动趋势,自然静摩擦力为零。

(5) 最后求出正压力 $\boldsymbol{N}$。将(7)式代入(2)式,即得

$$N(\tau)=W\left(\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\cos\alpha\right) \tag{11}$$

4. 质点系动能定理

动能定理给出了系统动能的改变与作用力的功之间的关系,但因为内力的功不一定是零,因此,这里的作用力包括了外力和内力的全部。由于光滑面、光滑铰链等产生的约束反力垂直于作用点的位移,这时所作的功为零,因此,有时把全部力分为主动力和约束力是方便的。

对质点系中第 i 个质点列出其动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{F}_i^{(e)}+\sum_{j\neq i}\boldsymbol{f}_{ij}$$

设第 i 个质点的矢径是 $\boldsymbol{r}_i$,将上式两端标乘 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$,可算得

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i^2\right)=\boldsymbol{F}_i^{(e)}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i+\left(\sum_{j\neq i}\boldsymbol{f}_{ij}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

将上式对 i 从 1 到 n 求和,得到

$$\mathrm{d}T=\sum\boldsymbol{F}_i^{(e)}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i+\sum_i\sum_{j\neq i}\boldsymbol{f}_{ij}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$$

或写成

$$\mathrm{d}T=\tilde{\mathrm{d}}W \tag{3.35}$$

$\tilde{\mathrm{d}}W$ 为全部作用力(外力和内力)的元功之和。(3.35)式是**动能定理**的微分形式。

将(3.35)式在系统的两种位形状态 1 和 2 之间积分,就得到

$$T_2-T_1=W_{12} \tag{3.36}$$

即动能的改变等于全部作用力的作功之和,称为动能定理的积分形式。

对于刚体，由于全部内力的作功之和为零，因此只要考虑外力的功，计算起来就容易得多了。

§3.4 守恒定律以及普遍定理的综合应用

1. 三个守恒定律

力学中有三个重要的守恒定律：动量守恒定律、动量矩守恒定律和能量守恒定律。这三个定律虽然都可由牛顿定律导出，但它们是被实验所精确地证实了的，其有效范围超出了经典力学的领域，实际上是独立的定律。一个守恒定律常常是宇宙中某种基本对称性的结果，守恒定律与不变性有着密切的联系，它们反映了时空结构的一些基本性质。例如，动量守恒定律是由空间的均匀性得到的，动量矩守恒是由于空间的各向同性，而由时间的均匀性就得到了能量守恒（这将在下章中说明）。这些守恒定律，不论在物理意义上或在实际解题中都有着十分重要的作用。下一章我们还要介绍更一般的守恒定理——诺德定理。下面就介绍三个守恒定律。

动量守恒定律（或称质心运动守恒）：若质点系的外力主矢在某一固定方向（取作 x 轴）的投影为零，则质点系沿该方向的动量守恒，即由(3.27)式和(3.28)式，得出

$$\text{若 } F_x^{(e)}=0,\ \text{则 } P_x=\Sigma m_i v_{ix}=MV_{Gx}=\text{常数} \tag{3.37}$$

动量矩守恒定律：若外力对某固定轴（设为 z 轴）的主矩为零，则质点系关于 z 轴的动量矩守恒。即由(3.30)式，得出

$$\text{若 } L_{oz}=0,\ \text{则 } H_z=\text{常数} \tag{3.38}$$

机械能守恒定律：若作用在质点系上的全部力（包括内力和外力）都是保守力（或非保守力作功之和为零），则质点系的机械能（动能和势能的总和）守恒，即由(3.36)和(3.20)式，得出

$$\text{若全部力为保守力，则 } T+U=\text{常数} \tag{3.39}$$

动量守恒和动量矩守恒定律告诉我们，只靠质点系的内部运动（内力）是不能改变系统的总动量和总动量矩的。因此、对于孤立系统，尽管其质心作匀速直线运动，但内力仍可改变系统的方位。只靠内力就可

改变方位的生动例子是：四脚朝天的猫由半空中自由下落时，猫能在空中自身翻转而当落地时总是四脚竖直着地的。但是，猫却一点也不能改变其下落运动，即不能改变其质心的运动。

2．质点系普遍定理（包括各个守恒定律）的综合应用

这是牛顿力学中最重要的内容，它们提供了解决动力学问题的一般方法，而在解决较为复杂的问题时，往往需要根据各个定理的特点，联合运用质点系普遍定理，才能解决问题。

用普遍定理解题的步骤是先取定对象（质点系），作运动分析和受力分析，再将全部力区分为内力与外力（或者是主动力与约束力），画出受力图，然后根据有关的守恒定律列出方程，如果这些方程还不足以解出全部未知量，再应用合适的普遍定理（可能要取适当的分离体）。除了这些动力学方程以外，常常还要列出一些补充方程，例如运动学条件或摩擦定律等。下面举例说明。

例 3.8 台秤可以认为由重为 w 的盘子和倔强系数为 k 的弹簧所组成（如图 3-9）。现有一个面团，重 Q，自高 h 处落到秤盘上。问台秤的最大读数是多少？

【解】 将秤盘的平衡位置取作坐标原点 O，设秤盘由平衡位置下降的最大距离是 δ，那么台秤的最大读数就是 $k\delta$。面团和秤盘的碰撞过程认为是完全非弹性的，在碰撞中有动能损失。本题涉及碰撞和非碰撞两类问题，要使用不同的动力学方程，所以把整个过程分为三个阶段来处理。第一阶段，面团碰撞秤盘以前，取面团为对象，由能量守恒定律可算得开始碰撞前的面团速度是 $u=\sqrt{2gh}$。第二阶段是碰撞过程，取面团和秤盘为对象，因外碰撞冲量为零，所以竖直方向的动量守恒，于是面团和秤盘的碰撞过程结束时，面团的速度是

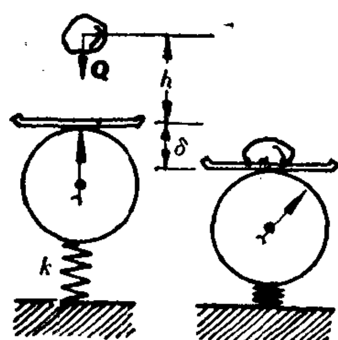


图 3-9

$$v=\frac{Q}{w+Q}u=\frac{Q}{w+Q}\sqrt{2gh}$$

第三阶段是压缩弹簧，面团与秤盘一起由原点 O 下落的距离为 δ，速度由 v 变为零。于是，由机械能守恒定律可得：

$$\frac{1}{2}\frac{w+Q}{g}v^2+0=0-Q\delta+\frac{1}{2}k\delta^2$$

将 v^2 的表达式代入，可解出(取正根)

$$\delta=\frac{Q}{k}+\sqrt{\left(\frac{Q}{k}\right)^2+2h\frac{Q^2}{k(w+Q)}}$$

所以秤盘上的最大读数是：

$$k\delta=Q(1+\sqrt{1+2kh/(w+Q)})$$

设 $h=0$，则这个读数是真实重量的两倍。

顺便指出，根据问题的性质(例如包含碰撞与非碰撞过程；或者运动过程中自由度有改变等)将解题过程划分为几个阶段，再分段列出运动方程，这是一种重要的解题技巧。

例 3.9 质量为 m 的两个完全相同的小珠，穿在光滑圆环上，在同一时刻，分别以初速为零自最高点下滑，圆环竖直地立于地面（图 3-10 a）。试问当环的质量 M 和小珠质量 m 有什么关系时，圆环才可能从地面跳起。

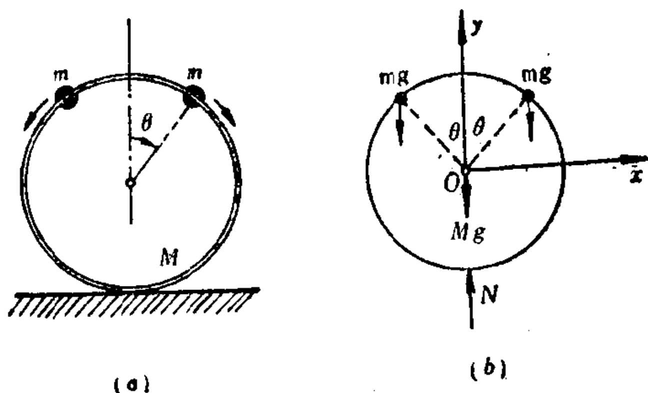


图 3-10

【解】 (1) 取环和小珠为对象，在环跳起前认为它是固定于地面的。

(2) 外力是重力和地面反力 N，小珠和环间的约束力是内力，画出受力图如图 b，建立坐标系 Oxy，并用 θ 角表示小珠的位置，如图 b(为什么两个小珠关于 y 轴对称?)。

(3) 机械能守恒(重力有势，全部约束力不作功)，即

$$T+U=m(R\dot{\theta})^2-2mgR(1-\cos\theta)=0$$

所以 $$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta) \tag{1}$$

（4）现求 N，由 y 方向的质心运动定理，有

$$2m\ddot{y}_A = N - Mg - 2mg \tag{2}$$

其中 $\ddot{y}_A$ 是小珠加速度的 y 分量，即

$$\ddot{y}_A = -R\dot{\theta}^2\cos\theta - R\ddot{\theta}\sin\theta \tag{3}$$

将(1)、(3)两式代入(2)式，得

$$N = Mg + 2mg(3\cos^2\theta - 2\cos\theta) \tag{4}$$

由 $N=0$，即得环上跳的临界值 θ_0 应满足的方程为

$$6m\cos^2\theta_0 - 4m\cos\theta_0 + M = 0 \tag{5}$$

因要求 $\cos\theta_0$ 有实根，就可得质量间的关系式为

$$\frac{M}{m} < \frac{2}{3} \tag{6}$$

例 3.10 质量为 m、长为 $2b$ 的均质杆 AB 的两端用长度均为 l 的轻绳悬挂于天花板上，使杆子静置于水平位置。今突然将其中的一条绳子切断(图 3-11a)。问：杆子在以后将作怎样的运动？另外，在一绳刚切断的瞬时，另一绳子中的张力 S 为多大？

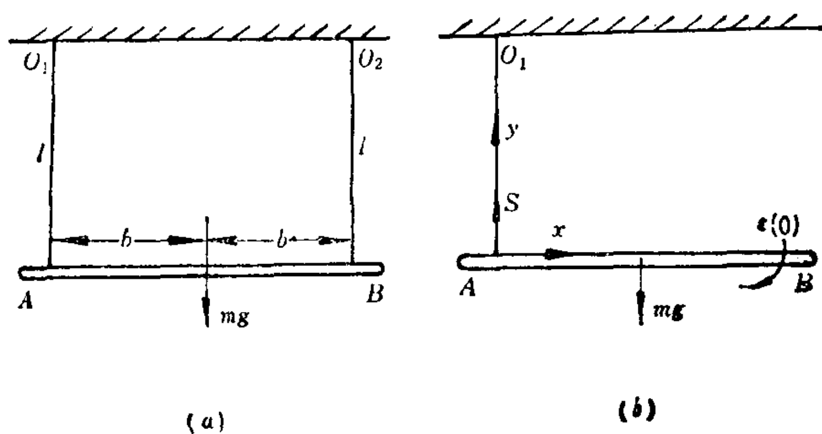


图 3-11

【解】 设切断 O_2B 线，则 AB 杆将绕 A 端转动，但 A 点也可绕 O_1 点作圆周运动，所以 AB 杆在竖直平面内作一般运动（两个自由

度)。

求张力 S 时,取切断绳子瞬时为起始时刻 ($t=0$)。要求绳子 O_1A 中的瞬时张力 $S(0)$,可有两种解法:一是列出 AB 在任意时刻 t 作平面运动的微分方程,解出 $S(t)$,然后令 $t=0$,即得 $S(0)$;另一种方法是,只列出 $t=0$ 瞬时的动力学方程。现用后一种解法。

先取 AB 杆为研究对象,它作平面运动。现在只考虑 $t=0$瞬时,这时,AB 杆为水平,O_1A 为竖直的,且杆的角速度为 $\omega(0)=0$,但 $\varepsilon(0)\neq 0$ (图 b)。

作用的外力有重力 mg 和张力 $S(0)$。

再写出杆子的瞬时动力学方程。对瞬时,不必考虑守恒定律(为什么?)。现列出 $t=0$ 时刻,AB 杆的质心运动方程和对质心的动量矩方程为

$$\begin{cases} ma_{Gx}(0)=0, \text{即 } a_{Gx}(0)=0 & (1) \\ ma_{Gy}(0)=S(0)-mg & (2) \\ J_G\cdot\varepsilon(0)=bS(0) & (3) \end{cases}$$

上面三个式子中含有 4 个未知量 $a_{Gx}(0)$,$a_{Gy}(0)$,$\varepsilon(0)$和 $S(0)$,所以应再补充一个运动学方程。因为 $\boldsymbol{v}_A(0)=0$,所以 $\boldsymbol{a}_A(0)=a_A(0)\boldsymbol{i}$。将基点法公式 $\boldsymbol{a}_G=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{\varepsilon}\times\overrightarrow{AG}-\omega^2\overrightarrow{AG}$ 在 y 方向投影,得

$$a_{Gy}(0)=-b\varepsilon(0) \quad (4)$$

由(1)式至(4)式,可解得

$$S(0)=\frac{1}{4}mg \quad (5)$$

可见在将绳切断的瞬时,绳中的张力较绳被切断前减小了。

习　题

3-1 试计算第一宇宙速度 v_1 (物体在地球表面作圆形轨道运行的速度,又称环绕速度)和第二宇宙速度 v_2 (使在地球表面发射的物体能脱离地球引力的最小发射速度,又称为脱离速度。例如,飞往月球的宇宙飞船,其发射速度几乎等于脱离速度。)

3-2 如图所示,自然长度为 l_0 的无重弹性绳,其一端固定,另一端系有重为 mg 的质点,设绳在铅垂平衡位置时的静伸长为 d,现把质

点往下拉，使绳再伸长 c 后由静止释放。试证明，如

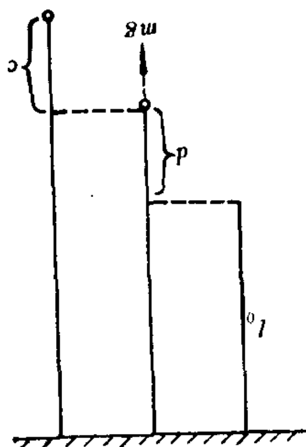
$$d(d+4l_0)>c^2>d^2$$

则质点回到原释放位置的时间为

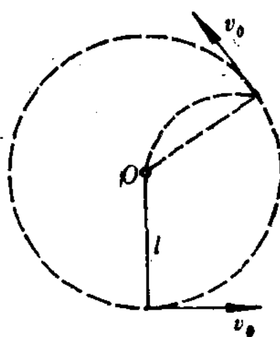
$$\tau=2\sqrt{\frac{d}{g}}(\pi-\alpha+\operatorname{tg}\alpha)$$

其中$\cos\alpha=\dfrac{d}{c}$，α 为锐角。

3-3　长为 l 的轻绳，在其一端系有一个质点，而对另一端 O，先将其握住，使质点自由下垂，这时再给质点具有水平方向的初速 $\boldsymbol{v}_0$，质点就在铅垂平面作圆周运动，当绳子张力为零时，将绳子的 O 点也释放，让质点自由运动。现若要求该点的轨迹能通过释放前的 O 点位置，试求初速 v_0 的大小。

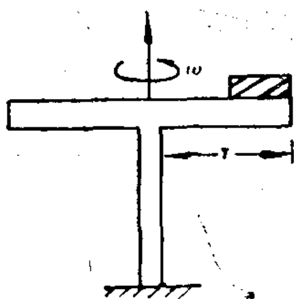


题 3-2 图



题 3-3 图

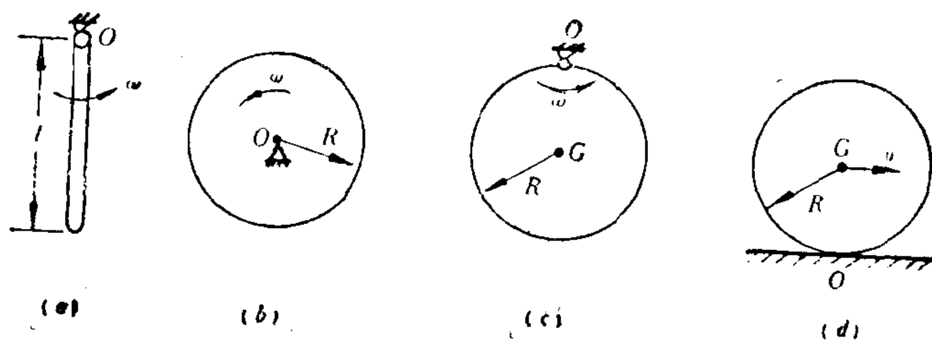
3-4　重为 20 N 的小物块放于绕铅垂轴转动的水平圆台上，如图所示。$r=1\text{m}$。今圆台从静止开始以 $0.5/\text{s}^2$ 的匀角加速度转动，设物块与台面间的摩擦系数为 0.25，问经过多少时间后，物块开始在台面上滑动？又，当 $t=2\text{ s}$ 时，物块与台面间的摩擦力有多大？



题 3-4 图

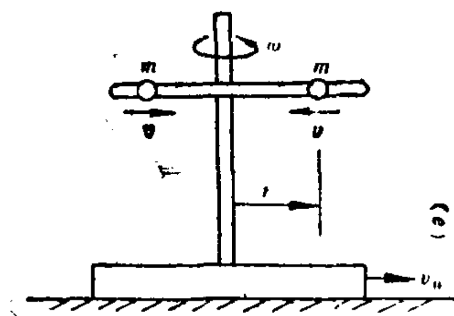
3-5　图示各均质物体的质量都是M，其中图d所示的圆轮在地面上只滚不滑。试计算

并分别　各个物体的动量、对O点的动量矩，以及动能。



题 3-5 图

3-6 设车辆以常速 v_0 前进，如图所示。车上有两个质量均为 m 的小球以速率 v 沿水平杆滑动，此杆又以常角速度 ω 相对于车辆转动。试求图示瞬时两球的绝对动能。

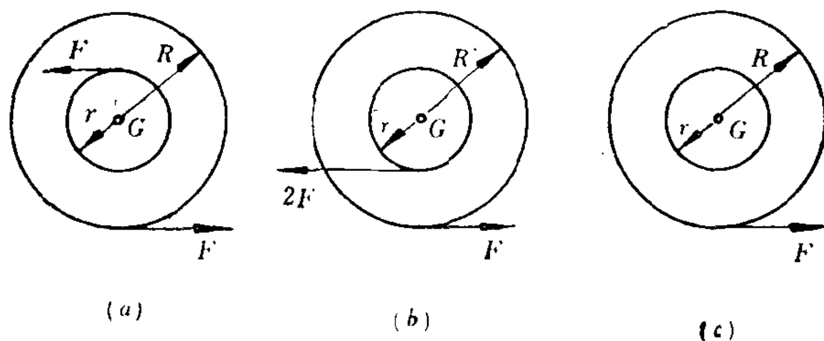


题 3-6 图

3-7 现有一质量为 M 的均质细杆 AB，设细杆端点 A 和 B 的速度分别为 $\boldsymbol{u}_A$ 和 $\boldsymbol{u}_B$，证明杆子的动能为

$$T=\frac{1}{6}M(\boldsymbol{u}_A^2+\boldsymbol{u}_A\cdot\boldsymbol{u}_B+\boldsymbol{u}_B^2)$$

3-8 质量为 M 的均质圆盘（半径为 R）平放在光滑水平面上，其受力情况如图 a、b、c 所示，试说明圆盘将如何运动。设开始时，圆盘静止，图中 $r=\dfrac{R}{2}$。



题 3-8 图

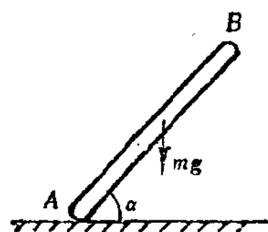
3-9 试写出下列各系统所满足的守恒定律(标量方程),并简述理由。

(1) 见图 a,一长为 $2l$ 的均质杆 AB,其一端搁在光滑水平面上,杆在竖直平面内,当倾角为 α 时由静止释放。

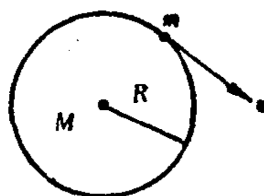
(2) 见图 b,一均质圆环(半径为 R,质量为 M)平放于光滑水平面上,环上有一甲虫(质量为 m)。初始时系统静止,然后甲虫相对于圆环以常速 u 爬行。

(3) 见图 c,体重相同的甲、乙两人分别站在轻滑轮两边的盘秤中,今甲在盘中立定跳高。设人重为 W,盘重为 Q。

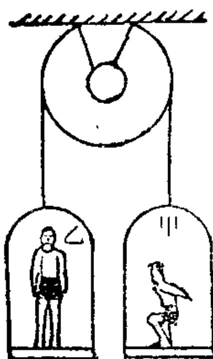
(4) 见图 d,一质量为 m 的小珠置于一个物块(质量为 M)的圆柱形孔的最低位置(孔半径为 R),开始时系统静止,今突然使物块(置于光滑水平面上)具有水平初速 v_0。



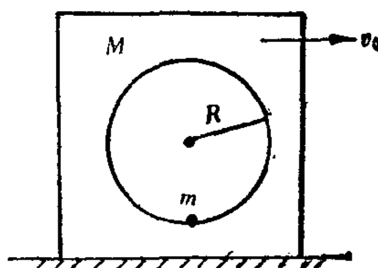
(a)



(b)



(c)



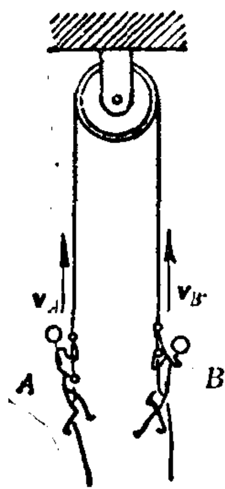
(d)

题 3-9 图

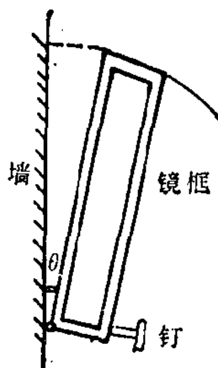
3-10 在跨过滑轮的轻软绳两端各有一人(体重相等)，从静止开始，分别以相对于软绳的速度(常数) v_1、v_2 向上爬。若不计滑轮质量，求两人的绝对速度 v_A、v_B。

又若设滑轮重量是人的$\frac{1}{2}$，且看作均质圆盘，则两人的绝对速度 v_A、v_B 又是多少？设轮与绳间无相对滑动。

3-11 镜框紧贴着墙搁在粗糙钉上，稍受扰动就向下倾倒，求镜框跳离钉子时与墙面的夹角 θ。



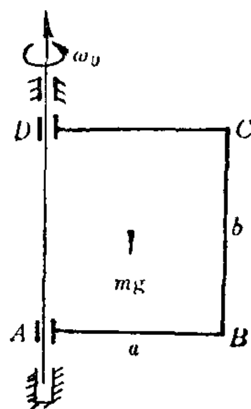
题 3-10 图



题 3-11 图

3-12 一炮弹的质量为 M_1+M_2，射出时的水平及竖直分速度为 u 和 v。当炮弹达到最高点时，其内部的炸药产生能量 E，使此炸弹分为 M_1、M_2 两部分，开始时两者仍沿原方向飞行，不计空气阻力，试求它们落地时相隔的距离。

3-13 矩形均质薄片 $ABCD$，边长为 a 和 b，重为 mg，绕垂直轴 AB 以初角速 ω_0 转动。此时，薄片的每一部分均受到空气的阻力，其方向垂直于薄片所在的平面，其量值与面积及速度的平方成正比，比例系数为 k，问经过多少时间后薄片的角速度减为初角速度的一半？



题 3-13 图

第四章　拉格朗日力学

我们已经知道，牛顿力学是以力、动量、动量矩为基本量的，它们都是矢量。当取定某一物体为研究对象时，首先要作受力分析，即考虑其他物体作用在该物体上的力，这时常要计算未知的约束力，虽然有时我们并不需要求它。

与牛顿力学不同，拉格朗日力学（简称拉氏力学）把物体系作为整体来研究，它的基本量是动能和功，都是标量。而且，在一般情况下，在运动方程中不出现约束力，这就给求解带来了很大方便；同时，因为采用广义坐标，扩大了坐标的概念，因而将分析力学（包括拉氏力学和哈氏力学）的方法与结论运用到了物理学的许多领域，成为学习理论物理、量子力学和相对论等课程的基础。

拉氏力学主要讨论质点系统在位形空间的运动。受约束的位形空间具有微分流形的结构。对有势系统，由一个流形及在其切丛上定义的拉氏函数就构成拉格朗日力学系统，系统中各点的局部坐标满足拉氏方程。

本章主要讨论第二类拉氏方程，它与数学有紧密的联系，是解决许多力学问题有力的工具。我们要求大家在掌握应用拉氏方程解题的基础上，与牛顿方程结合起来，取长补短，更快更好地解决各种力学问题。

最后指出，牛顿力学、拉氏力学以及哈氏力学虽然各有特点，但它们都属于经典力学的范围，它们的适用范围都是相同的，它们的基本原理也是相互联系的，因此，用这三种方法解同一问题时，所得的计算结果都应相同。

§4.1　分析力学的基本概念

研究由 N 个质点组成的力学系统，它们相对于某惯性系的位置由

矢量

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(x_i, y_i, z_i)$$

给出，其中 x_i、y_i、z_i($i=1,2,\cdots,N$)是第 i 个质点的直角坐标。假设每个质点的运动规律均为已知：$x_i = x_i(t)$，$y_i = y_i(t)$，$z_i = z_i(t)$，则该力学系统的运动就完全确定。力学系统的运动可从几何概念上方便地加以说明，即把 $3N$ 个坐标 x_i、y_i、z_i($i=1,2,\cdots,N$) 看作是 $3N$ 维位形空间中表示点 P 的坐标，而力学系统的运动就可简单地设想为由表示点 P 在位形空间中描出的曲线轨迹。

1. 约束及其分类

将力学系统中各个质点的位置和速度所受到的（几何学或运动学的）限制，称为**约束**。约束的数学表达式称为**约束方程**，其一般形式为

$$f(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i, t) = 0 \tag{4.1}$$

其中 f 关于各个变量的 2 阶偏导数均存在且连续。

按约束方程的不同形式，可将约束分类，见表 4.1。

表 4.1 约束的分类

名　　称	方　　程	说　　明
完整约束 (holonomic)	$f(r_i, t) = 0$	方程中不含有质点的速度
非完整约束 (nonholonomic)	$\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot v_i + A_0 = 0$	仅讨论线性非完整约束。左端为不可积。A_0 和 A_i 均为 t 和 r_i 的函数
定常约束 (scleronomic)	$f(r_i) = 0$　(或 $\sum_{i=1}^{N} A_i v_i = 0$)	约束方程中不显含时间 t(或 A_i 中不显含 t，且 $A_0 = 0$)
非定常约束 (rheonomic)	$f(r_i, v_i, t) = 0$	约束方程中显含时间 t
双面约束	$f(r_i, v_i, t) = 0$	约束方程可用等式表示
单面约束	$f(r_i, v_i, t) \geqslant 0$	约束方程以不等式表示。若将系统分段考虑，则以双面约束代替或完全解除约束

力学系统可按约束的分类作相应的分类，例如，只有完整约束的系

统称为**完整系统**，至少存在一个非完整约束的系统称为**非完整系统**等等。我们限于讨论完整系统和双面约束。

完整约束和非完整约束是有着本质差别的两类约束，假如给定了一个含有质点速度的约束方程，就应注意，是否可以通过该方程对时间的积分而得到形如

$$f(\boldsymbol{r}_i,t)=0 \tag{4.2}$$

的方程。如果可以，则该约束仍是完整的。完整约束又称为**可积约束**或**几何约束**。反之，如果约束方程不能积分成(4.2)式，则称为**非完整约束**，又称为**不可积约束**或**微分约束**。

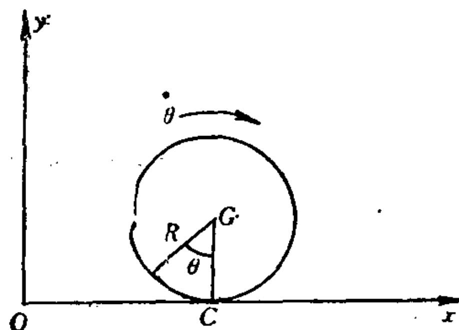


图 4-1

例如，一个圆盘在粗糙的直轨上只滚不滑(图 4-1)。设瞬时接触点为 C，则有 $v_C=0$，即

$$\dot{x}_G-R\dot{\theta}=0$$

这是一个含有质点速度的约束方程，但将它对 θ 求积分后变为

$$x_G=R\theta$$

设 y 轴经过圆盘初始位置时的盘心，所以这种约束是完整约束。

当力学系统存在有形如(4.2)式的完整约束时，在每一给定时刻系统就不能占据空间的任意位置，即完整约束是系统在时刻 t 的可能位置上加了一定的限制。下面是各种约束方程的例子。

例 4.1 完整约束。在固定球面上运动的点 $M(x,y,z)$，其约束方程为：

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

这是完整约束，也是定常约束。如果球半径以等速 v 均匀地向外膨胀(气球)，则约束方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(vt)^2$$

这是非定常约束，但仍是完整的。

例 4.2 单面约束。长为 l 的柔绳 AB，其两端各系有一个质点，系统作平面运动，约束方程是

$$(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2\leqslant l^2$$

又如果一个质点从水平放置的固定圆柱上自由滑下，则约束方程为
$$x^2+y^2\geqslant R^2$$

2. 虚位移和虚功

设在质点系统上加有 l 个完整约束
$$f_\alpha(\boldsymbol{r}_i,t)=0,\qquad(\alpha=1,2,\cdots,l)\tag{4.3}$$
将上式写成微分形式
$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_i}\cdot\boldsymbol{v}_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}=0,\qquad(\alpha=1,2,\cdots,l)\tag{4.4}$$
或者写成普法夫（Pfaff）形式
$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_i}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\mathrm{d}t=0,\quad(\alpha=1,2,\cdots,l)\tag{4.5}$$
我们将满足（4.5）式的 l 个方程的任一组无限小位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i(i=1,\cdots,N)$ 称为**可能位移**，而把满足相应的齐次方程组
$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0,\qquad(\alpha=1,2,\cdots,l)\tag{4.6}$$
的任一组无限小位移 $\delta\boldsymbol{r}_i(i=1,\cdots,N)$ 称为**虚位移**。因此，虚位移是系统各质点在瞬时 t 的某一可能位置所作的符合全部约束的任一无限小位移。显然，对于定常系统，由于（4.5）式中的 $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}=0$，因此，可能位移和虚位移是一致的。而对于非定常约束，虚位移是把时间“凝固”后的可能位移。虚位移可以是线位移，也可以是角位移。

要注意的是，虚位移是一个与运动无关的几何概念，它不是质点随时间的位移，而是按定义在瞬时 t 满足（4.6）式的一组无限小线段。虚位移 δr_i 在变分法中称为函数 $r_i(t)$ 的等时变分，它是这函数在其自变量 t 不变时的增量，见图 4-2 b，而图 4-2a 表示的微分 $\mathrm{d}r_i$ 与坐标因真实运动而引起的变化相符合。其实虚位移的运算法则与微分运算相同，但因虚位移不需要时间，所以有 $\delta t=0$。

质点系在主动力和约束力作用下产生的无限小位移称为**实位移**，它不但要满足约束方程，还要满足运动方程，而且与初始条件有关。

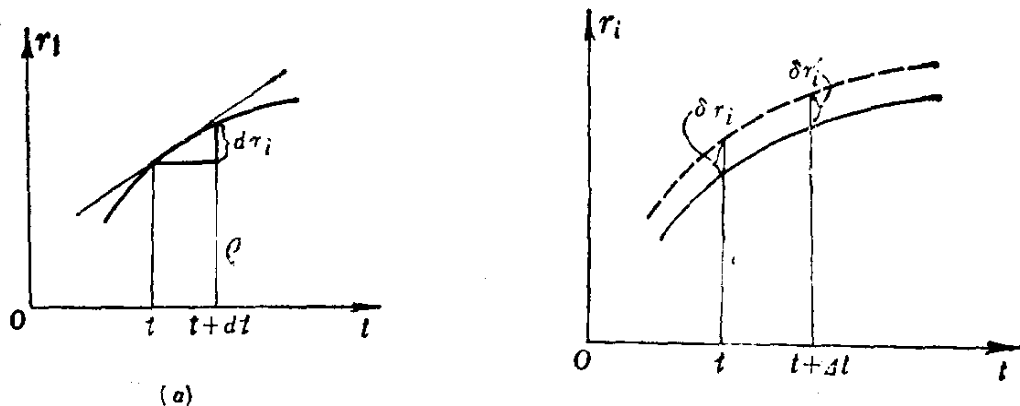


图 4-2

当系统静止时，没有实位移，只有虚位移。当质点系运动时，实位移与虚位移的主要区别是：

(1) 实位移是由于主动力而引起，在 $\mathrm{d}t$ 时间内实际所发生的位移，用 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 表示；而虚位移是想像的，是在瞬时 t 发生的，且不需要时间，只要满足在这一瞬时的运动学约束条件即可，用 $\delta\boldsymbol{r}$ 表示。对确定的时间 $\mathrm{d}t$，实位移是唯一的；而在任一瞬时 t，虚位移可以不止一个。

(2) 对于完整系统，如果约束是定常的，则实位移是虚位移之一；如果约束是非定常的，则实位移与虚位移不一致。

力在虚位移上作的功叫虚功，记作 $\delta w=\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}$，而力在真实位移中作的功称为元功。可见虚功是假想的，它与虚位移是同阶无穷小量。

例 4.3 普通单摆和变长度摆的虚位移。如图4-3所示，设摆长为 l，摆的矢径为 $\boldsymbol{r}(t)$。

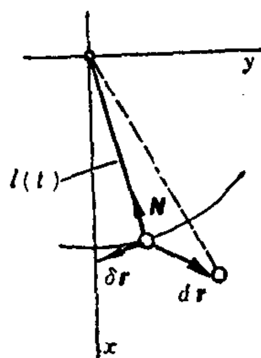


图 4-3

普通单摆的约束方程是：

$$[\boldsymbol{r}(t)]^2=l^2=\text{常数}$$

所以

$$\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0 \quad \text{及} \quad \boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$$

如图4-3所示，对于变长度单摆，其约束方程是：

$$[\boldsymbol{r}(t)]^2=[l(t)]^2$$

实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 满足

$$\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=l(t)l'(t)\mathrm{d}t$$

而虚位移 $\delta \boldsymbol{r}$ 应满足

$$\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$$

3. 自由度和广义坐标

(1) 自由度。在笛卡尔坐标中，虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_i$ 可用三个投影 $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i (i=1,\cdots,N)$ 来表示，因而确定完整系统虚位移的方程(4.6)式可写成

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0,(\alpha=1,\cdots,l) \quad (4.7)$$

如果这 l 个方程是独立的，则 $3N$ 个坐标变分 $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ 中有 $n=3N-l$ 个是独立的。我们把独立的坐标变分的数目称为系统的**自由度**，记作 n，即

$$n=3N-l \quad (4.8)$$

对完整系统，如果坐标是独立的，则其坐标变分也是独立的(为什么？)，所以完整系的自由度就是独立坐标的数目，或者说自由度是单值地确定质点系的位形所必需给出的独立变量的数目。例如对自由刚体，$n=6$。

还可以由定义看出，在确定非定常系统的自由度时，应先把非定常约束“凝固”，然后求此系统的自由度。

(2) 广义坐标。足以描述质点系位形而给出的任一组最少数目的独立变量均称为**广义坐标**(设为 s 个)，一般记作 $q_1, q_2, \cdots, q_s$。对于完整系统，广义坐标的数目就是系统的自由度，即 $s=n$。广义坐标是普通坐标概念的推广，它不一定是长度，可以是角度或其他物理量，如面积或体积等等。例如在平面开普勒问题中，可取行星扫过的面积为广义坐标。

由广义坐标的定义可知，它应满足两个要求：

i) 所有质点的矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 在每一时刻都可表示成广义坐标的单值连续函数：

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,\cdots,q_s,t), \quad (i=1,\cdots,N) \quad (4.9)$$

上式可以看成是笛卡尔坐标与广义坐标之间的变换式。

ii) 对所有 q_i 的值，完整约束方程(4.3)应自动满足，即在所有时刻 t，对任何广义坐标 q_i，下式恒满足：

$$f_\alpha[\boldsymbol{r}_i(q_1,\cdots,q_n,t);t]=0, \qquad (\alpha=1,\cdots,l) \tag{4.10}$$

对于一个力学系统,广义坐标的取法不是唯一的,可根据解题的方便灵活地选择。必须指出,对于定常系统,总可以选到这样一组广义坐标 $q_1,\cdots,q_s$,使变换式(4.9)中不显含时间 t,即

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,\cdots,q_s), \qquad (i=1,\cdots,N) \tag{4.11}$$

这里再对计算完整系统自由度的方法作些补充。公式

$$n=3N-l$$

对于计算有限质点系和杆件系统(每根杆被看成是受刚性约束的两个质点)是方便的。对于受到外界约束的单个刚体,其自由度 n 的计算公式可取为

$$n=\overline{N}-l \tag{4.12}$$

其中 $\overline{N}$ 为该刚体不受外界约束(自由运动)时,确定该刚体位置的坐标数(例如,刚体作一般运动时,$\overline{N}=6$;刚体作定点运动和平面平行运动时,$\overline{N}=3$; 等等),l 为外界加于刚体的完整约束数。例如在直线轨道上作纯滚动的圆盘,其 $\overline{N}=3$(圆盘作平面运动;可取坐标为 x_G,y_G,φ,其中G 为盘心,φ 为转角),$l=2$(即 $y_G=R=$盘半径,$x_G=R\varphi$;x 轴沿直线轨道),所以 $n=3-2=1$,这种方法对于选取广义坐标也是很有帮助的。

对于多个刚体构成的力学系统,只要根据刚体相对运动的概念和公式(4.12),也就不难求得其自由度了,这将在下面举例说明。

例 4.4 如图 4-4 所示,AB 杆的 A 端可在光滑水平面 xy 上自由滑动,而 B 端可沿 z 轴自由滑动,试求杆子的自由度 n 及广义坐标。

【解法一】 将 AB 杆看成是由A、B 两点(距离保持 l)组成($N=2$)的系统,共需 6 个坐标 (x_A,y_A,z_A)和(x_B, y_B, z_B)来确定系统的位置。现在有 4 个约束方程

$$(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2=l^2,$$

$$z_A=0;\quad x_B=y_B=0$$

所以,由(4.8)式,$n=3\times2-4=2$。

现在来取广义坐标。为了今后计算方便，可取两个独立的角度坐标：$q_1=\theta$（AB 杆与 z 轴的夹角），$q_2=\psi$（AB 在 xy 平面的投影线 OA 与Ox 轴的夹角），如图所示。

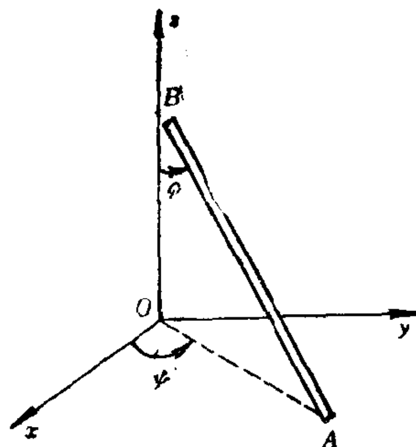


图 4-4

【解法二】 AB 杆作一般运动，$\overline{N}=6$，取 B 为基点（这时，$x_B=y_B=0$），另外，自转角 $\varphi=0$，章动角 θ 与 z_B 有关系式：$l\cos\theta=z_B$，可以看出，也是 4 个约束方程。那么，由(4.12)式，$n=6-4=2$。

例 4.5 一机械手的模型，如图 4-5 所示，它由四个刚体 AB、BC、CE 和DF 通过铰链连接构成，其中 A 是球铰，B、C 和 D是三个平面铰，试求该机械手的自由度 n 及广义坐标。

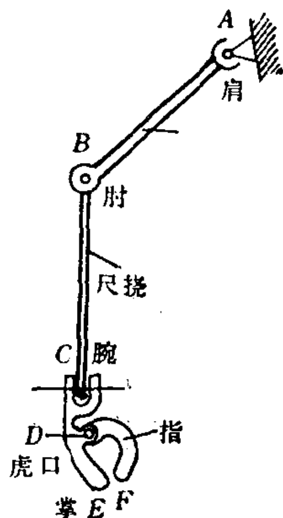


图 4-5

【解法一】 显然这是完整系统。我们从与固定参考系相联系的刚体 AB（肱）开始，逐个计算刚体的自由度，同时选取广义坐标。

先考虑刚体 AB，因 A 是球铰，AB 作定点转动，其自由度 $\overline{N}_1=3$（约束方程数 $l_1=0$），因此，可取三个欧拉角 θ、ψ、φ 为广义坐标，这样就认为 AB 为固定的。再考虑与其相联系的刚体 BC（尺挠）相对于 AB 的运动，因 B 是平面铰，BC 作定轴转动，故 $\overline{N}_2=1$（$l_2=0$），可取转角 α 为广义坐标。同理，在认为 AB 和 BC 均固定的前提下，考虑到刚体 CD（手掌）相对于 BC 是作定轴转动，所以 $\overline{N}_3=1$（$l_3=0$），广义坐标可取为转角 β；最后，由于刚体 DF（手指）相对于 CD 作定轴转动，$\overline{N}_4=1$（$l_4=0$），因此，可取广义坐标为相对转角γ，则机械手的总自由度为

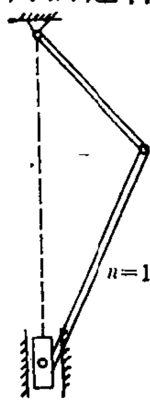
$$n=\overline{N}_1+\overline{N}_2+\overline{N}_3+\overline{N}_4=6$$

【解法二】因为每个刚体有六个自由度，而每一个球铰要减少 3 个自由度，每一个平面铰又要减少 5 个自由度。所以机械手的自由度是

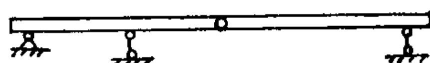
$$(4\times6)-3-(3\times5)=6$$

例 4.6 求图 4-6 所示三个平面刚杆系统的自由度。

(1) 如图 a，曲柄连杆机构　　　　(2) 如图 b，静定梁



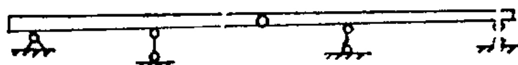
(a)



n=0

(b)

(3) 如图 c，超静定梁



n=−1

(c)

图 4-6

4. 理想约束

所谓**理想约束**，就是在由 N 个质点组成的非自由质点系统上，全部约束反力 $\boldsymbol{R}_i$ 在任何一组虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i(i=1,2,\cdots,N)$ 上所作的功之和等于零，即

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{4.13}$$

因为系统的独立坐标变分的数目为 n，所以 (4.13) 式实际上代表了 n 个独立的关系式。

常见的理想约束有下列几种(请读者自行证明，参阅文献 [4])：

(1) 接触处绝对光滑，如光滑曲线、光滑曲面、光滑铰链等(不论是固定的还是按已知规律运动的)。

(2) 接触处绝对粗糙。物体在接触处无相对滑动，且不计滚动摩

擦。如齿轮啮合、纯滚动等。

（3）柔软而不可伸长的轻绳（张紧）。

（4）刚性轻杆。

刚体是具有理想约束的质点系，而复杂机构可以看作是刚体系统。若其中两两之间的接触都是理想约束，则这样的机构也可以看作是具有理想约束的质点系统。

应该指出，在某些情况下，把实际的约束理想化是不允许的。例如，有时系统中的摩擦是不可忽略的，则常可这样处理，即只考虑这种约束的法向反力，而把摩擦力作为未知的主动力，这时仍认为系统是理想约束的，但同时要将摩擦定律作为补充条件列入。

§4.2 虚位移原理和达朗伯原理

虚位移原理和达朗伯原理是分析力学中的两个基本原理，我们将由此导出质点系的拉格朗日方程。

1. 虚位移原理

它又被称为虚功原理或可能位移原理，是分析力学中判断物体是否平衡的普遍原理。

虚位移原理可表述为：具有定常、完整、理想约束的质点系统，设其原来是静止的，则要保持其平衡的充要条件是所有主动力在系统的任何一组虚位移上所作的虚功之和 δW 等于零，即

$$\delta W=\sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{4.14}$$

其中 $\boldsymbol{F}_i$ 是作用于第 i 个质点上的主动力。

虚位移原理作为一个基本的力学原理，可以不必证明而直接应用。当然，虚位移原理与牛顿定律是一致的，从牛顿定律推出虚位移原理的证明可见附录Ⅲ。

虚位移原理也可用质点系的广义坐标 $(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 来表达，而且形式更为简单。注意到

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_n,t)$$

将此式代入虚位移原理（4.14）式，即

$$\delta W = \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\right)\cdot\boldsymbol{F}_i$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j$$

令

$$Q_j=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j},(j=1,2,\cdots,n) \tag{4.15}$$

这就是对应于广义坐标 q_j 的**广义力**，因此，虚位移原理成为

$$\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i=0 \tag{4.16}$$

因为在完整系统，$\delta q_i(i=1,2,\cdots,n)$是相互独立的，所以（4.16）式等价于 n 个方程：

$$Q_i=0\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

即对于具有定常、理想约束的完整系统，如开始时系统静止，则在力系作用下平衡的充要条件是所有的广义力为零。这是用广义坐标表达的虚位移原理。

为了计算广义力，除了直接按定义（4.15）式计算外，另一种办法是考虑在一组特殊位移下广义力所作的功。设要求广义力 Q_j，今构造一组坐标变更，使第 j 个广义坐标的变分 $\delta q_j\neq0$，而其余的 $\delta q_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n,i\neq j)$，不妨取 $\delta q_j=1$，则

$$\delta W=\sum_i Q_i\delta q_i=Q_j\delta q_j=Q_j$$

又如果系统上的全部主动力都是有势的，设总势能为

$$U(q_1,q_2,\cdots,q_n)$$

则相应于 q_j 的广义力 Q_j 为

$$Q_j=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

$$=-\sum\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}_i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=-\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

即当主动力有势时，广义力为

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}, \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4.17}$$

所以当主动力全部有势时，质点系平衡的充要条件又可写为

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = 0, \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4.18}$$

这说明质点系在平衡位形处，势能 U 具有驻定值，进一步还可证明(参阅文献[1])，如果势能在平衡位形处达到极小值，则这个平衡位形是稳定的。

在实际应用中，当要求广义力时，先把系统上的全部主动力分为两部分，一部分是有势的，设其总势能为 $U(q_1,q_2,\cdots,q_n)$，另一部分是非有势的，设其虚功为 $\delta\widetilde{W} = \sum\widetilde{Q}_j\delta q_j$，则广义力为

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \widetilde{Q}_j, (j=1,2,\cdots,n)。$$

例 4.7 试求图 4-7 所示双摆系统的广义力。设双摆由轻杆 OA 和 AB 用光滑铰相连，在杆端 A 和 B 点分别附有质量为 m_1 和 m_2 的质点，且在 AB 杆上作用有力偶，其矩为 L，在 B 端还作用有水平力 $\boldsymbol{F}$。系统在铅垂平面内运动。

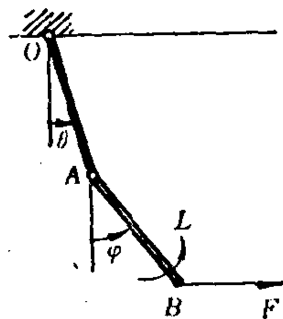


图 4-7

【解】 取双摆为研究对象，则系统的自由度 $n=2$，取广义坐标为 $q_1=\theta$(OA 杆与竖直线夹角)，$q_2=\varphi$(AB杆与竖直线夹角)，如图示。

系统的主动力有重力，水平力 $\boldsymbol{F}$ 和力偶矩 $\boldsymbol{L}$。

重力是有势的，总势能为

$$U = -m_1gl_1\cos\theta - m_2g(l_1\cos\theta + l_2\cos\varphi)$$

非有势力的虚功为

$$\begin{aligned}\delta\widetilde{W} &= \boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{L}\cdot\delta\varphi \\ &= F(l_1\cos\theta\delta\theta + l_2\cos\varphi\delta\varphi) + L\delta\varphi\end{aligned}$$

系统的总虚功为

$$\delta W = -\delta U + \delta \widetilde{W} = Q_\theta \delta\theta + Q_\varphi \delta\varphi$$

所以广义力为

$$Q_\theta = [F\cos\theta - (m_1 + m_2)g\sin\theta]l_1$$

$$Q_\varphi = (F\cos\varphi - m_2 g\sin\varphi)l_2 + L$$

虚位移原理(4.14)式中的每一项都是力和位移的乘积，这组力构成平衡力系，这组位移构成约束所容许的微小的位移，所以利用方程(4.14)式可解决以下两类问题：

(1) 当虚位移为已知时，该式就成为力系平衡的必要条件，可用来解决平衡问题。

(2) 当力系是一个已知的平衡力系时，该式就成为这组虚位移所必须满足的几何方程，常可用来计算各种结构的位移。

例 4.8 一倒摆系统如图 4-8 所示。摆锤重 W，摆杆长 l。在摆杆的 A 点 ($\overline{OA} = a$) 连有一刚度为 k 的水平弹簧，当摆在铅直位置时弹簧未变形。若不计摆杆的质量，设摆作微振动，试求系统的平衡位置，并判断其稳定性。

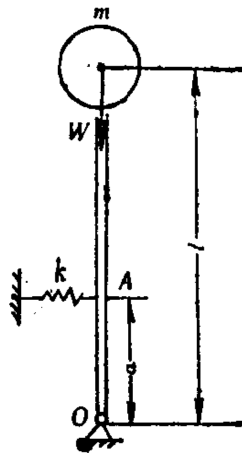


图 4-8

【解】 取倒摆为系统，则系统的约束是完整、定常和理想(光滑铰，刚体)的。

显然，系统的自由度 $n = 1$，取广义坐标 $q_1 = \varphi$(摆杆与竖直线夹角)。

现在是保守系统(主动力为重力和弹性力，均有势)，势能是

$$U = -Wl(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}k(a\varphi)^2$$

$$= -2Wl\sin^2\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}ka^2\varphi^2$$

$$\doteq \frac{1}{2}(ka^2 - Wl)\varphi^2$$

式中已略去三阶以上的高阶小量，则由虚位移原理，平衡条件为

$$Q = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$$

即

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = (ka^2 - Wl)\varphi = 0$$

所以平衡位置为 $\varphi = 0$。

现在是一个自由度的保守系统，当势能具有极小值时$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} > 0\right)$，平衡位置是稳定的，而当势能具有极大值时$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} < 0\right)$，平衡位置则是不稳定的。所以当

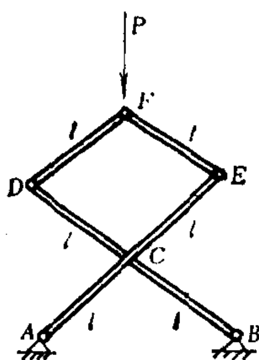
$$ka^2 - Wl > 0$$

即

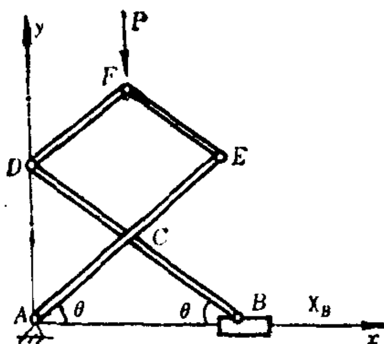
$$a > \sqrt{\frac{Wl}{k}}$$

时，$\varphi = 0$ 是稳定的平衡位置。

例 4.9 图 4-9 a 所示机构中，各杆都以光滑铰链相连接，且有 $AC = CE = BC = CD = DF = FE = l$。若在点 F 作用一铅直方向的力 P，不计各杆重量，试求机构平衡时，支座 B 的水平约束反力 X_B。



(a)



(b)

图 4-9

【解】 虚位移原理是解决主动力系的平衡问题的，这里却要求约束反力 X_B，因此要将 X_B 看作主动力。为此先要把支座 B 处的水平方

向的约束解除，以力 X_B 代替，那么，机构变成如图 b 所示的形状。

现在取图 b 所示机构为对象，系统的约束是完整、定常和理想(光滑铰)的。

系统的自由度 $n=1$ （滑块 B 可沿水平方向运动)，取广义坐标为 $q_1=\theta$（AE 杆与 x 轴夹角，如图)。系统的主动力有 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{X}_B$，它们是非有势力，其虚功为

$$\delta W = P\delta y_P + X_B\delta x_B = P\cdot\delta(3l\sin\theta) + X_B\cdot\delta(2l\cos\theta)$$
$$= 3Pl\cos\theta\delta\theta - 2X_Bl\sin\theta\delta\theta$$

由 $\delta W=0$ 得

$$X_B = \frac{3}{2}P\operatorname{ctg}\theta$$

2. 达朗伯(D'Alembert)原理

按牛顿定律，质点系中第 i 个质点的运动方程为

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i, \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{4.19}$$

其中 $\boldsymbol{F}_i$ 和 $\boldsymbol{R}_i$ 分别是作用在第 i 个质点上的主动力和约束力。

为使动力学方程在形式上与熟悉的静力学方程相同，若形式上将矢量 $-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 称为作用在第 i 个质点上的(达朗伯)惯性力，则运动方程就具有下列形式

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i + (-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i) = 0 \tag{4.20}$$

这就是**达朗伯原理**：作用在质点系中每个质点上的主动力、约束反力和惯性力，构成一瞬时平衡力系。

当已知质点系的运动而要由运动方程来求反力时，使用达朗伯原理往往是方便的。

现设质点系具有理想约束，则对任意一组虚位移

$$\delta\boldsymbol{r}_i \quad (i=1,2,\cdots,N)$$

根据(4.13)式有

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

将(4.19)式代入，得

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{4.21}$$

这就是动力学普遍方程(又称 D'Alembert-Lagrange 方程)，它对运动中任一瞬时都成立。

§4.3 第二类拉格朗日方程

拉格朗日力学的主要部分是第二类拉格朗日方程，它只适用于理想、完整系统;另有第一类拉氏方程,又称拉氏乘子法,它既适用于完整系统,也适用于非完整系统,但由于方程数目比自由度数目要多，实际使用不多,解非完整系的另一方法是阿佩尔(Appel)方程。这里只讨论**第二类拉格朗日方程，简称拉氏方程。**

1. 方程的导出及其标准形式

设具有完整、理想约束的质点系(由 N 个质点组成)的自由度为 n,广义坐标是 $q_1,q_2,\cdots,q_n$,则第 i 个质点的矢径可表示为

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_n,t),(i=1,2,\cdots,N) \qquad (4.22)$$

将上式求导一次即得速度为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

由此可以得到两个重要的关系式:

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \qquad (4.23)$$

及

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k\partial q_j}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t\partial q_j}$$

即

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) \qquad (4.24)$$

为了导出拉氏方程，先将动力学普遍方程(4.21)用广义坐标 q_i $(i=1,2,\cdots,n)$来表达,注意到虚位移的定义,由(4.22)式有

$$\delta \boldsymbol{r}_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (4.25)$$

那么由上面三式可得达朗伯惯性力的虚功之和为

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i &= -\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\right]\delta q_j \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2\right) + \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2\right)\right]\delta q_j \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

根据广义力的定义 (4.15) 式，可将主动力的虚功之和表示为

$$
\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j \tag{4.27}
$$

将 (4.26)、(4.27) 式代入动力学普遍方程 (4.21)，得

$$
\sum_{i=1}^{n}\left[Q_j - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j = 0 \tag{4.28}
$$

(4.28)式对完整系统和非完整系统均成立。对于完整系统，因为 n 个 δq_j 是彼此独立的，所以由 (4.28) 式可以得到 n 个独立的标量方程

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, 2, \cdots n) \tag{4.29}
$$

这就是理想、完整系统的拉格朗日方程，简称拉氏方程，式中的 T 是系统的总动能，而且已表示成广义坐标 q_j、广义速度 $\dot{q}_j$ 和时间 t 的函数，即

$$
T = T(\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n, q_1, \cdots, q_n, t)
$$

今设系统上的全部主动力中，有一部分是有势力，总势能为 U，另一部分是非有势力，相应的广义力记作 $\widetilde{Q}_j (j = 1, 2, \cdots, n)$，则广义力 Q_j 可表示为

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \widetilde{Q}_j \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

将上式代入(4.29)式，得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \widetilde{Q}_j \tag{4.30}$$

(4.30)式与拉氏方程(4.29)式等价。由于势能U中不显含广义速度$\dot{q}_j(j=1,2,\cdots,n)$，所以有

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j}\right] - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_j} = \widetilde{Q}_j$$

如引进**拉氏函数**$L=T-U$，L为动能和势能之差，它是q_j、$\dot{q}_j$、t的函数，$L=L(q_j,\dot{q}_j,t)$，则上式成为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \widetilde{Q}_j \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4.31}$$

这是常用的形式，有时称之为**拉氏方程的标准形式**，它也与拉氏方程(4.29)式等价。

拉氏方程有些什么特点呢？

第一，方程的个数（都是标量方程）是n，与系统自由度的数目相等。

这是拉氏方程的很大优点。例如对于由N个质点和l个约束组成的质点系，拉氏方程的个数为$n=3N-l$，而用牛顿方法则要$3N+l$个方程($3N$个牛顿方程和l个约束方程)，并且拉氏方程中的动能、势能等物理量都是标量，而牛顿方程和力都是矢量，使用起来就不如标量那么方便了。

拉氏方程(4.31)式的左端，在完成d/dt的运算之后，将包含时间t、广义坐标q_j、广义速度$\dot{q}_j$和广义加速度$\ddot{q}_j(j=1,2,\cdots,n)$。(4.31)式右端的广义力$\widetilde{Q}_j(j=1,2,\cdots,n)$通常都是$t$、$q_k$、$\dot{q}_k(k=1,2,\cdots,n)$的已知函数：

$$\widetilde{Q}_j = \widetilde{Q}_j(t,q_k,\dot{q}_k), \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

所以拉氏方程(4.31)由 n 个二阶常微方程组成，其中有 n 个依赖于独立变量 t 的未知函数 q_j。这个微分方程组的阶数等于 $2n$。由于决定 n 自由度完整系统运动的微分方程的阶数不可能低于 $2n$ （因为根据变量 q_j 和 $\dot{q}_j(j=1,2,\cdots,n)$初值的任意性，方程组的解至少应该包括 $2n$ 个任意常数），因此，广义坐标下的拉氏方程具有最少可能的阶。

第二，拉氏方程的形式具有对广义坐标的不变性。由于对一个系统来说，广义坐标的选取不是唯一的，因此，这种方程形式的不变性增强了拉氏方程的实用性。

第三，拉氏方程 (4.31) 中不包含未知约束反力，这正是它的优点之一。但怎样才能求得约束反力 $\boldsymbol{R}_i(i=1,2,\cdots,N)$ 呢？这时先将拉氏方程积分，求得广义坐标 $q_j(t)(j=1,2,\cdots,n)$，它们是时间 t 的已知函数，然后代入 (4.22) 式，得到各质点的矢径

$$\boldsymbol{r}_i(t)=\boldsymbol{r}_i(q_1(t),q_2(t),\cdots,q_n(t),t) \qquad (i=1,2,\cdots,N)$$

因而也就可以确定出各点的速度和加速度为

$$\boldsymbol{v}_i(t)=\dot{\boldsymbol{r}}_i(t),\boldsymbol{a}_i(t)=\ddot{\boldsymbol{r}}_i(t) \quad (i=1,2,\cdots,N)$$

以及

$$\boldsymbol{F}_i(t,\boldsymbol{r}_k\boldsymbol{v}_k) \quad (i=1,2,\cdots,N)$$

于是，未知反力就可以由下式求得：

$$\boldsymbol{R}_i=m_i\boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{F}_i \quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{4.32}$$

在实际求反力时，往往可适当选取分离体，应用牛顿定律或普遍定理而方便地求得，见例 4.11。

第四，用拉氏方法求系统的动力学微分方程组有径直的程序可循，且条理性强。一般的解题步骤是：(1) 取定质点系(即研究对象)，明确各个物体作哪一类运动，并分析约束的性质，决定自由度 n 和选取广义坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_n$；(2) 分析系统的主动力，并写出系统在惯性参考系中的动能 T 和势能 U，以及拉氏函数 $L=T-U$。必须注意，T 和 U 一定要表达成广义坐标 q_i、广义速度 $\dot{q}_i$ 和时间 t 的函数；(3) 再计算非有势力的广义力 $\widetilde{Q}_j(j=1,2,\cdots,n)$；(4)代入拉氏方程 (4.29)、(4.30) 或(4.31)式中的任一个，即可求得该系统的运动微分方程。

例 4.10 如图 4-10 a 所示，质量为 m_1的滑块可沿光滑水平直线

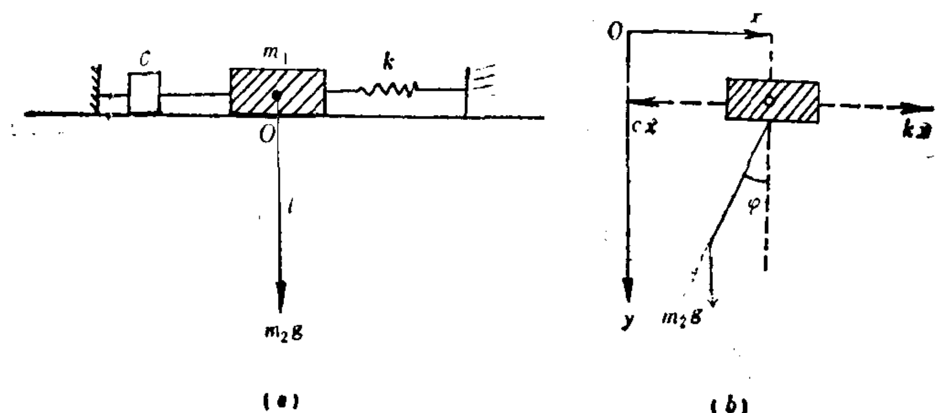


图 4-10

滑动，其右侧与一倔强系数为 k 的弹簧相连，左侧与一阻尼系数为 c 的阻尼器相连，滑块又通过铰链 O 与轻杆（长为 l）连接，该杆的下端附有质量为 m_2 的摆锤。系统只能在图示铅垂面内运动，试列出此系统的运动微分方程。

【解】 取滑块-单摆-弹簧-阻尼器为系统，则该系统具有完整、定常和理想约束，系统的自由度 $n=2$，取广义坐标为 $q_1=x$（滑块位移），$q_2=\varphi$（摆杆与竖直线的夹角），如图 b。

系统的主动力有重力，弹性力以及阻尼力。系统的势能为

$$U=\frac{1}{2}kx^2-m_2gl\cos\varphi$$

非有势力的虚功为

$$\delta\widetilde{W}=-c\dot{x}\delta x$$

所以

$$\widetilde{Q}_x=-c\dot{x},\ \widetilde{Q}_\varphi=0$$

又动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2+l^2\dot{\varphi}^2-2\dot{x}l\dot{\varphi}\cos\varphi)$$

$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2-m_2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

由拉氏方程(4.31)式，得

$$(m_1+m_2)\ddot{x}-m_2l\ddot{\varphi}\cos\varphi+m_2l\dot{\varphi}^2\sin\varphi+c\dot{x}+kx=0$$

$$m_2l\ddot{\varphi}-m_2l\ddot{x}\cos\varphi+m_2gl\sin\varphi=0$$

如本例中没有弹簧及阻尼器($k=c=0$)，则质点 m_2 在平面上的运动轨迹为一椭圆，此时该系统称为椭圆摆。

2. 有势系统的拉氏方程及其首次积分

如果系统上的全部主动力都是有势的，则我们就称该系统为**有势系统。**

因为有势系统的$\tilde{Q}_j=0(j=1,2,\cdots,n)$，所以拉氏方程 (4.31)式就具有更加简单的形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0,\quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4.33}$$

由上式可知，只要给定函数 L，就能构成系统的运动方程。所以给定 L 就等于给定了力学系统，因此把 L 称为特性函数（以后还有其他的特性函数）。当然一个系统的拉氏函数 L 并不是唯一的，例如由于零势能的不同取法，势能 U，因而拉氏函数 L 可差一个常数，但由 (4.33) 式可知，运动方程还是相同的，这时可认为是同一个拉氏函数。

因为(4.33)式是一组具有 n 个二阶常微分方程的方程组，对于大多数力学系统，要将运动方程完全解出来，即用初等函数或定积分来表示是不可能的。然而，若能求得方程的某些首次积分，尽管未能完全解出方程，但也能得到系统的许多性质。这些首次积分的求得，通常与广义坐标的适当选取有关。有势系统的首次积分有两类：

(1) 循环积分

如果函数 L 不依赖于广义坐标 q_j，而只含有它的导数 $\dot{q}_j$，则 q_j 称为系统的**循环坐标**。对于循环坐标 q_j 应有

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

对于有势系统，由 (4.33)式立即可得积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=\text{常数}=c \tag{4.34}$$

因为在$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$中不含广义坐标对时间 t 的两阶导数，所以(4.34)式是首次积分，并称为**循环积分**。我们已知 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ 或 $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ 是对应于 q_j 的广义动量，所以循环坐标的物理意义是：对应于循环坐标的**广义动量守恒**。它把第三章中的动量守恒和动量矩守恒定律统一起来了。系统的循环坐标可以不止一个，有几个循环坐标，就可得到几个循环积分。

(2) 广义能量积分

由(4.33)式还可方便地求得另一种首次积分。为此只要将(4.33)式中每个方程都乘以 $\dot{q}_j$，然后相加，得

$$\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

在上式两端加上和式 $\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$，就可将上式左端写成全微商：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right)$$

$$=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial L}{\partial t}$$

最后的等式是由于 $L=L(\boldsymbol{q}_j,\dot{\boldsymbol{q}}_j,t)$而得到的。于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L\right)=-\frac{\partial L}{\partial t}\tag{4.35}$$

若 L 不显含时间 t，即 $\frac{\partial L}{\partial t}=0$，那么，可由上式得首次积分为

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L=\text{常数}=h\tag{4.36}$$

再将质点系的动能用广义坐标、广义速度和时间表达为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t^2}\right)^2$$

$$=T_2+T_1+T_0$$

其中

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k$$

$$T_1=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(2\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)\dot{q}_j=\sum_{j=1}^{n}b_j\dot{q}_j$$

$$T_0=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

即 T_2,T_1,T_0 分别是广义速度 $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n$ 的齐次二次式，齐次一次式和齐次零次式(不含广义速度)。则

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L=\sum_j\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L$$

$$=\sum_j\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j+\sum_j\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L$$

根根**欧拉齐次函数定理**,可得

$$\sum\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L=2T_2+T_1-(T_2+T_1+T_0-U)$$

$$=T_2-T_0+U \tag{4.37}$$

所以(4.36)式可写为

$$T_2-T_0+U=h \tag{4.38}$$

容易证明,若约束是定常的,则上式就是机械能守恒。实际上,此时质点系的动能 $T=T_2$,即 $T_1=T_0=0$,故

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-L=T+U=E \tag{4.39}$$

对于非定常约束，且当 $\partial L/\partial t=0$ 时,首次积分 (4.36) 式就存在,但这时 (4.39)式不成立,即系统的总机械能不守恒,所以把(4.36)式称为**广义能量积分**或雅可比(Jacobi)积分。

如果我们把机械能守恒的系统称为**保守系统**,则由前面可知,它应满足三个条件:约束是定常的;主动力全部有势;势能不显含时间 t。必须指出,这里讲的势能是指主动力的势,而第三章中的势能是全部力(包

括主动力和约束力)的势能，因此两处机械能守恒的条件是有差别的。

例 4.11 如图 4-11 a 所示，半径为 r、质量为 m 的匀质圆柱沿竖直平面内的固定大圆柱(半径为 R)作纯滚动，求接触点 C 处的摩擦力 f。

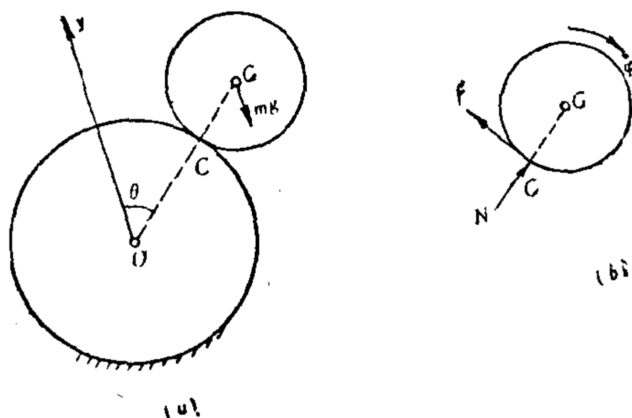


图 4-11

【解】 取小圆柱为系统。因为它只滚不滑，所以静摩擦力不作功，系统具有理想、完整、定常约束，系统的自由度 $n=1$，取广义坐标为 $q_1=\theta$ (圆心连线 $\overline{OG}$ 与竖直线的夹角)。系统的主动力只有重力，是有势的，其势为

$$U=mg(r+R)\cos\theta$$

设小圆的绝对角速度为 $\dot{\varphi}$，则由只滚不滑的条件得

$$r\dot{\varphi}=(r+R)\dot{\theta} \tag{1}$$

因此动能为

$$T=\frac{1}{2}m(r+R)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$$

$$=\frac{3}{4}m(r+R)^2\dot{\theta}^2$$

代入拉氏方程 (4.33) 式得

$$\frac{3}{2}m(r+R)^2\ddot{\theta}=mg(r+R)\sin\theta$$

即

$$(r+R)\ddot{\theta}=\frac{2}{3}g\sin\theta \tag{2}$$

由于拉氏方程是求不出理想约束力的，因此，现根据牛顿力学，取小圆为分离体，作受力图如图 b。由相对于质心的动量矩定理，得

$$\frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi}=rf$$

将 (1)、(2) 两式代入上式，即得摩擦力为

$$f=\frac{1}{3}mg\sin\theta$$

例 4.12 人造卫星的运动。如图 4-12，质量为 m 的人造地球卫星在地球引力作用下运动，试求卫星的轨迹方程及其运动规律。

【解】 以卫星为对象，以地心平动系为参考系。受地球引力作用的卫星必在通过地心的固定平面内运动，现在此平面内建立极坐标系，即以地心为坐标原点，任选一方向为极轴 x。卫星的自由度 $n=2$，取极坐标 (r,θ) 为广义坐标(如图示)。

卫星的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

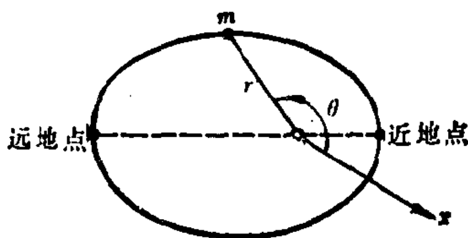


图 4-12

地球引力势能为

$$U=-\frac{\mu m}{r}$$

系统有两个首次积分，即

机械能守恒：

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{\mu m}{r}=E \tag{1}$$

关于 θ 的循环积分：

$$r^2\dot{\theta}=C_1 \tag{2}$$

上式中 E 和 C_1 都是常数，(2) 式就是开普勒第二定律。

为求运动轨迹，将 (2) 式代入 (1) 式，消去 $\dot{\theta}$，得

$$\dot{r} = \pm\sqrt{2\cdot\frac{E}{m}+2\frac{\mu}{r}-\frac{C_1^2}{r^2}} \tag{3}$$

由 (3) 式与 (2) 式消去 dt,即得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \pm\frac{r^2}{C_1}\sqrt{2\frac{E}{m}+2\frac{\mu}{r}-\frac{C_1^2}{r^2}} \tag{4}$$

通过分离变量和求积分,得到卫星的轨迹方程为

$$r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)} \tag{5}$$

其中 θ_0 是卫星初始位置的矢径与轴的夹角。又

$$p = \frac{C_1^2}{\mu}$$

$$e = \frac{C_1}{\mu}\sqrt{2\frac{E}{m}+\left(\frac{\mu}{C_1}\right)^2} \tag{6}$$

(5) 式中的参数 p 和 e 分别称为**半通径**和**偏心率**,且当 $e=0$ 时轨道为圆周,当 $0<e<1$ 时轨道为椭圆,当 $e=1$ 时轨道为抛物线,而当 $e>1$ 时轨道为双曲线。对于人造地球卫星,应有 $0\leqslant e\leqslant 1$,当轨道是椭圆时,坐标原点(即地心)是它的一个焦点,这符合开普勒第一定律。如取 x轴通过轨道的近地点(见图),则(5)式成为

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}, \qquad (0<e<1) \tag{7}$$

现在求运动规律。将 (7) 式代入 (2) 式,并利用 (6)式,可得到

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{C_1}{r^2} = \frac{\mu^{1/2}}{p^{3/2}}(1+e\cos\theta)^2 \tag{8}$$

设 $\theta=0$ 时$t=0$,则有

$$t = \frac{p^{3/2}}{\mu^{1/2}}\int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+e\cos\theta)^2} \tag{9}$$

注意到 (9) 式右端积分后会含有反正切函数

$$\varphi(\theta) = \text{arc tg}\ \frac{(1-e)\text{tg}\frac{\theta}{2}}{(1-e^2)^{1/2}}$$

当 $\theta \to \pm\pi, \pm 3\pi, \cdots$ 时，上式要出现跳跃，跃度为 $-\pi$，(9) 式最后可写成如下形式：

当 $(2i-1)\pi < \theta < (2i+1)\pi$ 时

$$t = t(\theta) = \frac{p^{3/2}}{\mu^{1/2}}\left[\frac{2}{(1-e)^{3/2}}\ \text{arc tg}\frac{(1-e)\text{tg}\frac{\theta}{2}}{(1-e^2)^{1/2}} - \frac{e}{1-e^2}\ \frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right]$$

$$+ \frac{p^{3/2}}{\mu^{1/2}}\frac{2}{(1-e^2)^{3/2}} i\pi, \ (i = 0, 1, 2, \cdots) \tag{10}$$

上式称为时间关于转角的表达式。这个时间公式很有用，例如可求得卫星的周期 τ 为

$$\tau = t(2\pi) - t(0) = \frac{p^{3/2}}{\mu^{1/2}} \cdot \frac{2}{(1-e^2)^{3/2}} \tag{11}$$

设卫星的近地点高度为 h_1，远地点高度为 h_2，地球半径为 R，由于从 (7) 式可得

$$\frac{p}{1+e} = R + h_1, \qquad \frac{p}{1-e} = R + h_2$$

则

$$\frac{p}{1-e^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e}\right) = R + \frac{h_1 + h_2}{2} = a$$

其中 a 是椭圆的半长轴。这样周期 (11) 式可表示为

$$\tau = \frac{2\pi}{\mu^{1/2}} a^{3/2} \tag{12}$$

这就是开普勒第三定律。

下面对我国的"东方红-1号"卫星作具体计算。

已知卫星的近地点高度 $h_1 = 439$ km，远地点高度 $h_2 = 2384$ km，地球引力常数 $\mu = 1.4349708 \times 10^9 \text{km}^3/\text{min}^2$。因卫星的近地点于最初阶段在赤道附近上空，故取 R 为地球赤道半径，即 $R = 6378$km，则轨道系数为

$$e=\frac{r_{max}-r_{min}}{r_{max}+r_{min}}=0.12485, \qquad p=\frac{2r_{max}r_{min}}{r_{max}+r_{min}}=7668\ \text{km}$$

所以轨道方程为

$$r=\frac{7668}{1+0.12485\cos\theta}\text{km}$$

同样可算得时间表达式为

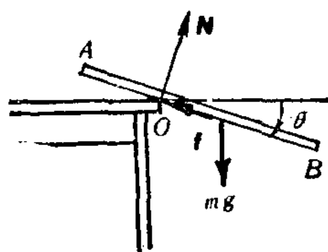
$$t=t(\theta)=36.297\ \text{arc tg}\left(0.8821\ \text{tg}\frac{\theta}{2}\right)-2.2481\frac{\sin\theta}{1+0.12485\cos\theta}$$

$$+36.297\pi i \qquad (2i-1)\pi<\theta<(2i+1)\pi, \qquad (i=0,1,2,\cdots)$$

而周期为

$$\tau=36.297\pi=114.03\ \text{min}$$

例 4.13 如图 4-13 所示，均匀杆 AB 的三分之一放在水平桌面



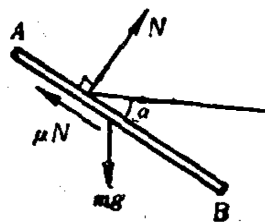


图 4-13

上，悬空端用手托住，使杆保持水平，今突然将手释放，杆就绕桌边 O 点转过角度 α 后开始发生滑动。试证明，桌边与杆子间的摩擦系数 μ 满足关系式

$$\mu=2\text{tg}\,\alpha$$

【证】 取 AB 杆为对象，设 $t=t_1$ 为杆开始滑动的时刻，现讨论 $t\in[0,t_1]$。因杆在 O 点无滑动，且具有理想、完整、定常约束。$n=1,q_1=\theta$（AB 杆与水平线夹角），设杆长为 l，质量为 m。那么

$$T=\frac{1}{18}ml^2\dot{\theta}^2,\ U=-\frac{l}{6}mg\sin\theta,\quad \widetilde{Q}_\theta=0$$

由机械能守恒可得

$$\frac{1}{18}ml^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{6}mgl\sin\theta=0$$

解出

$$\dot{\theta}^2=\frac{3g}{l}\sin\theta \tag{1}$$

现在要求$\theta(t_1)=\alpha$,时杆开始发生滑动,即在O点处静摩擦力f达到最大值,$f=\mu N$,这要用普遍定理来解。

作出t_1瞬时AB杆的受力图,如图b。

由质心运动定理得

$$m\dot{\theta}^2(t_1)\frac{l}{6}=-mg\sin\alpha+\mu N \tag{2}$$

$$m\frac{l}{6}\ddot{\theta}(t_1)=mg\cos\alpha-N \tag{3}$$

再利用(1)式,即可求得　　$\mu=2\mathrm{tg}\,\alpha$　　　　　　　　**证毕**

3. 诺德(Noether)定理

前已指出,对于有势系统,如果在拉氏函数中存在循环坐标,则可立即求得运动微分方程的首次积分。但首次积分并不总能从拉氏函数的明显对称性中得到,也不总是具有简单的形式。实际上,各种守恒定律(包括动量守恒,动量矩守恒以及能量守恒等)都是一个更为普遍的定理的特殊情形,这个定理就是诺德(Noether)定理,它是由德国女数学家诺德在1918年提出的,后经许多学者的简化和普及,已经便于表达和应用。下面简单地作一讨论。

设力学系统是有势的,且具有n个自由度,其广义坐标为$q_1,q_2,\cdots,q_n$,拉氏函数为$L(\dot{q},q,t)$。假如存在单参量变换族,使原变量$q_1,q_2,\cdots,q_n,t$变换到新变量$\tilde{q}_1,\tilde{q}_2,\cdots,\tilde{q}_n,\tilde{t}$。即

$$\tilde{q}_i=\tilde{q}_i(q,\dot{q},t,s),\ \tilde{t}=\tilde{t}(q,\dot{q},t,s),(i=1,2,\cdots,n) \tag{4.40}$$

且有

$$(\tilde{q}_i)_{s=0}=q_i,\ \ \tilde{t}_{s=0}=t,(i=1,2,\cdots,n) \tag{4.41}$$

其中s是连续变化的参量,它独立于坐标q_i和时间t。

如以新变量 $\tilde{q}_i$、$\dfrac{\mathrm{d}\tilde{q}_i}{\mathrm{d}\tilde{t}}=\dfrac{\dot{\tilde{q}}_i}{\dot{\tilde{t}}}$、和 $\tilde{t}$、代替原变量 q_i、$\dot{q}_i$ 和 t，则就得到新的拉氏函数 $L\left(\tilde{\boldsymbol{q}},\dfrac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{q}}}{\mathrm{d}\tilde{t}},\tilde{t}\right)$，假如存在函数 $F(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}_1,t)$ 满足下列方程：

$$\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left[L\left(\tilde{\boldsymbol{q}},\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{q}}}{\mathrm{d}\tilde{t}},\tilde{t}\right)\dot{\tilde{t}}\right]\right\}_{s=0}=\dot{F} \tag{4.42}$$

则该拉氏系统存在首次积分 I。

$$I=L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\left(\frac{\partial\tilde{t}}{\partial s}\right)_{s=0}-F+\sum_i\frac{\partial L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)}{\partial\dot{q}_i}\left[\left(\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial s}\right)_{s=0}-\dot{q}_i\left(\frac{\partial\tilde{t}}{\partial s}\right)_{s=0}\right] \tag{4.43}$$

式 (4.42) 中的 $\dot{F}$ 是 F 的全导数。通常可取 $F=$ 常数，特别 $F=0$。

以上就是**诺德定理**。为了证明它，先引进记号

$$A_i=\left(\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial s}\right)_{s=0} \text{ 和 } B=\left(\frac{\partial\tilde{t}}{\partial s}\right)_{s=0},(i=1,2,\cdots,n) \tag{4.44}$$

则 (4.43) 式就简记为

$$I=LB-F+\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}(A_i-\dot{q}_iB)=\text{常数} \tag{4.45}$$

现在把 $\tilde{q}_i$ 和 $\tilde{t}$ 展开为 s 的幂级数，并注意到 (4.41) 式和 (4.44) 式，就有

$$\tilde{q}_i=(\tilde{q}_i)_{s=0}+\left(\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial s}\right)_{s=0}s+\cdots=q_i+A_is+\cdots$$

$$\tilde{t}=t+Bs+\cdots$$

由此，有

$$\dot{\tilde{q}}_i = \dot{q}_i + \dot{A}_i s\,,\quad \dot{\tilde{t}} = 1 + \dot{B}s$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{q}_i}{\mathrm{d}\tilde{t}} = \frac{\dot{\tilde{q}}_i}{\dot{\tilde{t}}} = \frac{\dot{q}_i + \dot{A}_i s}{1 + \dot{B}s}$$

令 $s = 0$，可算得

$$(\dot{\tilde{q}}_i)_{s=0} = \dot{q}_i,\quad (\dot{\tilde{t}})_{s=0} = 1,\quad \left(\frac{\mathrm{d}\dot{\tilde{q}}_i}{\mathrm{d}\dot{\tilde{t}}_s}\right)_{s=0} = \dot{q}_i,$$

$$\left(\frac{\partial\dot{\tilde{t}}}{\partial s}\right)_{s=0} = \dot{B},\quad \left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathrm{d}\tilde{q}_i}{\mathrm{d}\tilde{t}}\right)\right]_{s=0} = \dot{A}_i - \dot{q}_i\dot{B}$$

注意到

$$\left[\frac{\partial L(\tilde{\boldsymbol{q}},\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{q}}/\mathrm{d}\tilde{t},\tilde{t})}{\partial\tilde{t}}\right]_{s=0} = \frac{\partial L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)}{\partial t}\text{，等等。}$$

现把(4.42)式中对 s 的导数直接写出，得到

$$\left\{\left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial\tilde{q}_i}\frac{\partial\tilde{q}_i}{\partial s} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial(\mathrm{d}\tilde{q}_i/\mathrm{d}\tilde{t})}\frac{\partial(\mathrm{d}\tilde{q}_i/\mathrm{d}\tilde{t})}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial\tilde{t}}\frac{\partial\tilde{t}}{\partial s}\right]\dot{\tilde{t}}\right.$$

$$\left. + L\,\frac{\partial\dot{\tilde{t}}}{\partial s}\right\}_{s=0} = \dot{F}$$

把前面 $s = 0$ 时的各式代入，就得

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}A_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}(\dot{A}_i - \dot{q}_i\dot{B}) + \frac{\partial L}{\partial t}B + L\ \dot{B} = \dot{F} \quad (4.46)$$

上式中 $L = L(q,\dot{q},t)$，对 (4.46) 式左端第一个和式，用拉氏方程代入，即

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

又因

$$\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}-\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i-\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

把以上两式代入(4.46)式，就得到完全导数为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[LB-F+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(A_i-\dot{q}_iB)\right]=0$$

由此立即得到(4.45)式，诺德定理证毕。

这个定理的证明比较繁，幸运的是，它的应用却比较简单。特别，如果取单参数变换族为

$$\tilde{q}_i=\tilde{q}_i(q,\dot{q},t;s),\ \tilde{t}=t,(i=1,2,\cdots,n) \tag{4.47}$$

且
$$(\tilde{q}_i)_{s=0}=q_i$$

又取函数 $F(q,\dot{q},t)=0$，则诺德定理可叙述为

如果变换式(4.47)使拉氏函数 L 保持不变，即

$$L(\tilde{\boldsymbol{q}},\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}},t)=L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \tag{4.48}$$

则该系统必存在下列首次积分：

$$I=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial s}\right)_{s=0}=\text{常数} \tag{4.49}$$

下面举例说明其应用。

例 4.14 n 个质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 的质点，可沿光滑水平环移动，各质点由弹簧连接(如图 4-14)。取第 i 个质点距环上 O 点的弧长为广义坐标 q_i。试选取适当的单参数变换族 $\tilde{q}_i=\tilde{q}_i(q_j,s)(i,j=1,2,\cdots,n)$，使系统的拉氏函数保持不变，并证明，由诺德定理，系统的首次积分是 $\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{q}_i$。

【解】 力学系统由 n 个质点和弹簧组成，具有完整、定常和理想约束。系统的自由度为 n，广义坐标为 $q_1, q_2, \cdots, q_n$。则拉氏函数为

$$L(q,\dot{q})=\frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{q}_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}C_i(q_{i+1}-q_i)^2-\frac{1}{2}C_n(q_1-q_n)^2 \qquad (1)$$

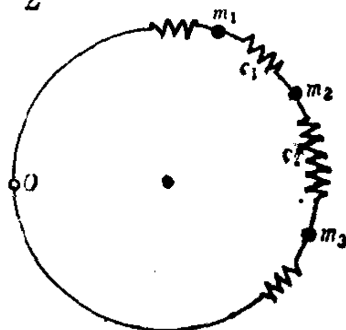


图 4-14

现取一组特殊的单参数变换

$$\tilde{q}_i=q_i+s, \qquad \tilde{t}=t, \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (2)$$

显然它满足诺德定理的条件，即

$$(\tilde{q}_i)_{s=0}=q_i, \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (3)$$

$$L(\tilde{q},\dot{\tilde{q}})=L(q,\ \dot{q}) \qquad (4)$$

那么，由诺德定理(4.49)式有

$$I=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial s}\right)_{s=0}=\sum_i m_i\dot{q}_i$$

证毕

例 4.15 设力学系统的拉氏函数对于时间平移是不变的，即拉氏函数不显含时间。试由诺德定理求该系统的首次积分。

【解】 选取单参数(s)变换族为：

$$\tilde{q}_i=q_i, \qquad \tilde{t}=t+s, \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (1)$$

又取 (4.45) 式中的函数 $F=0$。则容易验证，诺德定理的条件是满足的，系统的首次积分为

$$I=L-\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i=\text{常数} \qquad (2)$$

显然，这就是广义能量积分。

习　题

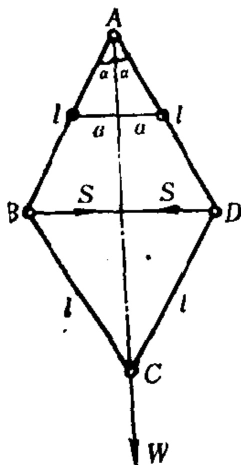
4-1　试对下列各系统，说明约束性质，并求自由度和广义坐标：

系　　统	约束性质	自由度，广义坐标
双摆 θ φ	理想，完整，定常	$n=2$；φ，θ
圆柱在水平面上运动 1．绝对光滑 2．绝对粗糙 C	理想，完整，定常	
水平面上两圆柱 1．接触均光滑 2．接触均绝对粗糙 3　地面光滑，柱面间绝对粗糙 A B		
可转框架与杆 AB 1．光滑接触 2．光滑接触且已知框架角速度 $\omega(t)$ z A B		

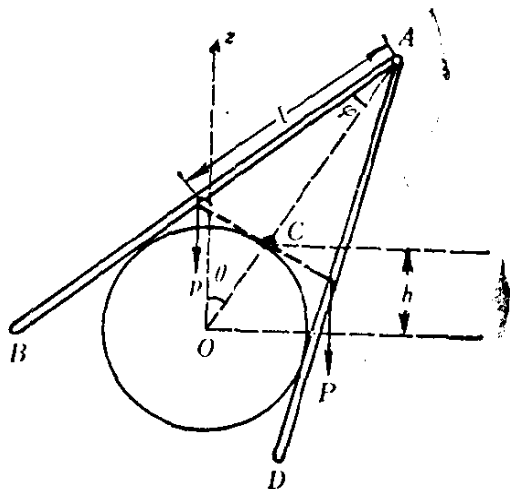
续表

系　　统	约束性质	自由度，广义坐标
重质点沿粗糙旋轮线下滑		
圆柱沿斜面运动 1. 接触均光滑 2. 斜面作等加速直线平动 y		
链条自光滑桌面下滑		
两杆在A点铰接，且与定圆柱相切 A B C		
调速器OA杆，转速$\omega=\omega(t)$为已知 ω O A		
AB杆，光滑接触，A点沿z轴，B点在xy面上 z A y x B		

4-2 长度同为 l 的轻棒四根，光滑地联成一菱形 $ABCD$。AB、AD 两边支于同一水平线上相距为 $2a$ 的两根钉上，BD 间用一轻绳联结，C 点上系一重物 W。设 A 点上的顶角为 2α，试用虚功原理求绳中的张力 S。



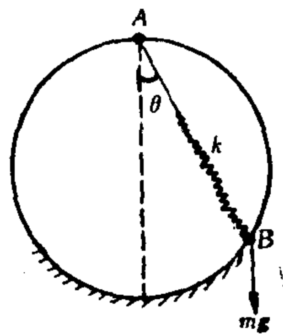
题 4-2 图



题 4-3 图

4-3 在光滑固定圆柱上放置着长为 $2l$，重量为 P 的两根均匀杆 AB、AD，两杆用光滑铰链相连于 A 点，试求系统的平衡位置并讨论其稳定性。已知圆柱的半径为 r。

4-4 质量为 m 的小珠可在铅垂放置的光滑固定圆环（半径为 r）上自由滑动。一自然长度为 l、倔强系数为 k 的无重弹簧的一端 A 固结于圆环的最高点，另一端 B 与小珠相连。试求在什么条件下小珠存在平衡位置？求出该平衡位置并讨论其稳定性。



题 4-4 图

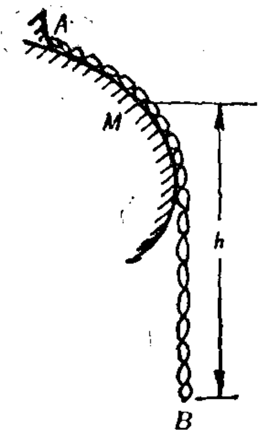
4-5 软链的一端 A 固连于任意形状的光滑曲面上，其另一端 B 自由下垂，如图所示。试证软链上任一点 M 的张力为

$$S=\sigma h$$

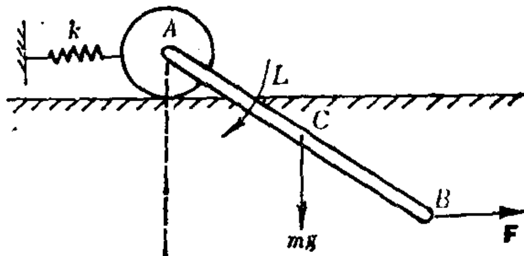
其中 σ 为软链单位长度的重量，h 为 M 点离开自由端 B 点的高度。

4-6 一根长为 $2a$、质量为 m 的匀质连杆 AB，其上端 A 通过无重小滑轮与一弹性系数为 k 的水平弹簧相连，在连杆的 B 端作用有水平

力 $\boldsymbol{F}$，连杆上还作用有力偶，其矩的大小为 L，方向如图。所有的接触都是光滑的，求连杆 AB 在铅垂面内的运动微分方程。

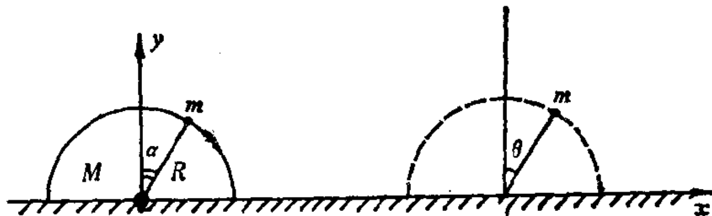


题 4-5 图



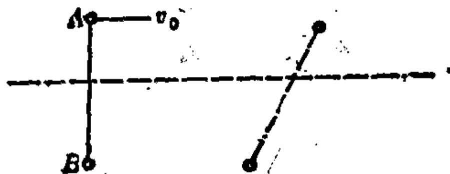
题 4-6 图

4-7 质量为 M、半径为 R 的光滑半球，其底面放在光滑的水平面上，有一质量为m的质点沿此半球面滑下。设质点的初位置与球心的联线和竖直方向上的直线间的夹角为 α，并且起初时这系统是静止的，求此质点滑到它与球心的联线和竖直线间的夹角为 θ 时 $\dot{\theta}$ 的值。



题 4-7 图

4-8 质量相同的两个小球 A、B 用长为 l 的轻杆相连，然后放置于光滑水平面上。初始时，A 球具有初速 $\boldsymbol{v}_0$，其方向与 $\overline{AB}$ 垂直，而 B 静止。试证 A、B 球的运动轨迹均为旋轮线，并求杆中的张力 S。



题 4-8 图

4-9 匀质圆柱体半径为 R，质量

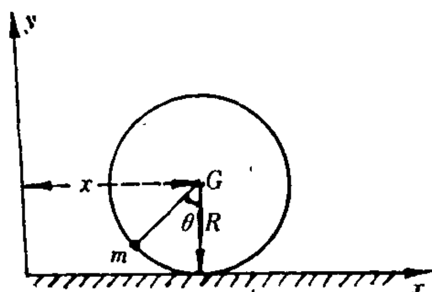
为 M,放在粗糙的平面上,设其初速为 v_0,方向水平向右,同时,它又以初角速 ω_0 沿顺时针方向转动,且 $\omega_0 R < v_0$。如圆柱体与平面的摩擦系数为 f,问经过多长时间,圆柱体才能只滚不滑地向前运动,并求该瞬时圆柱体中心的速度。

4-10　赤道同步卫星。要求发射一运动轨迹为圆形轨道的同步卫星,使固定在地球上的人看到此卫星是不动的,试求此卫星轨道的半径 r 及离地面的高度 h (注:地球自转周期为 23 小时 56 分 4 秒)。

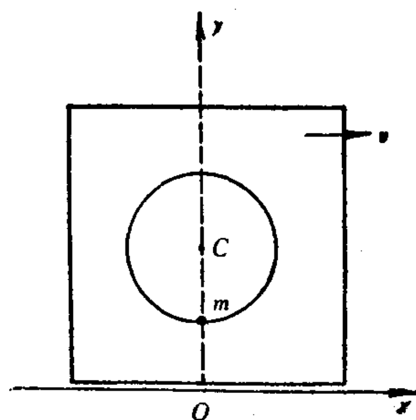
4-11　在一个匀质轮(质量为 M,半径为 R)的边缘上固连一个质量为 m 的质点,轮子沿光滑水平直线轨道运动。如图,取 (x,θ) 为广义坐标,求系统的动能、势能表达式,建立拉氏方程,并证明下式成立

$$\left\{\frac{1}{2}M(M+3m)+m^2\sin^2\theta\right\}\ddot{\theta}+m^2\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2+m(M+m)n^2\sin\theta=0$$

其中 $n^2=g/R$。



题 4-11 图

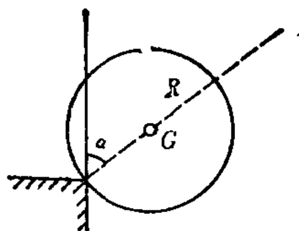


题 4-12 图

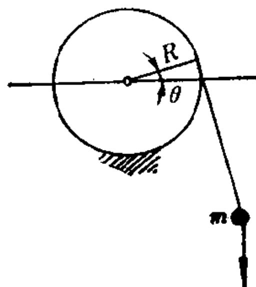
4-12　一个质量为 M 的物块静止于光滑的水平桌面上,物体上开一内壁光滑、半径为 a 的圆柱形孔,孔的轴是水平的。有一质量为 m 的小珠静止于孔上,且位于通过物块质心的垂直面内。假设突然给物块以速度 v (小珠静止),其方向沿与孔轴相垂直的方向。证明:若 $v^2=2ga(M+m)/M$,则小珠恰可升至轴的水平线上,以及当小珠再次到达圆孔上最低位置时,物块的速度为 $(M-m)v/(M+m)$。

4-13　半径为 R 的均质圆柱初始时静止在台边上,这时 $\alpha=0$。由于受到小扰动而无滑动地滚下,如图示。求圆柱体离开水平台子时的

夹角α和此时圆柱的角速度ω。



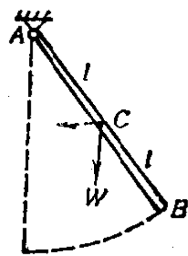
题 4-13 图



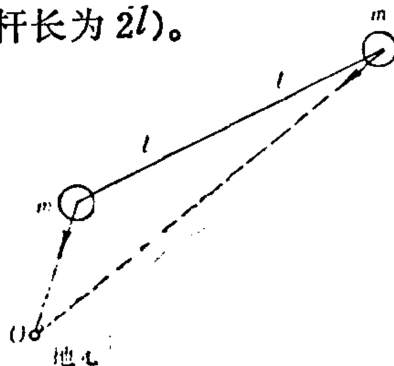
题 4-14 图

4-14　质量为m的质点悬在一线上，线的另一端绕在一半径为R的固定圆柱体上，构成一摆。设在平衡位置时，线的下垂部分的长为l，且不计线的质量，求此摆的运动微分方程。

4-15　长为$2l$、重为W的匀质杆AB绕光滑铰链A摆动，当杆摆到铅垂位置时，其角速度为ω_0，此瞬时铰链A突然撤去，求以后杆子质心C的运动轨迹以及杆的角速度Ω(杆长为$2l$)。



题 4-15 图



题 4-16 图

4-16　在长为$2l$的轻杆两端各系有一个质量为m的质点就组成哑铃状人造卫星。试求此卫星在地球引力场中作平面运动时的运动微分方程及其初积分。

第五章　牛顿法和拉氏法的应用

在掌握了牛顿力学和拉氏力学的基本方法以后，可以用它们来解决许多力学问题。下面我们来介绍这两个方法在几方面的应用，同时，我们都尽可能地把两种方法结合起来，各取所长，以便迅速、正确地解决力学问题。

§5.1　刚体动力学

经典的刚体动力学在工程技术中有许多应用，近年来由于宇航、运动生物力学的发展，多刚体系统的研究日益增多，但刚体动力学仍是它们的重要基础。

我们已经讨论了刚体的定轴转动和平面运动动力学，在这一节要讨论刚体的定点转动和一般运动。

1．惯量矩阵

设某刚体绕固定点 O 转动，它的瞬时角速度矢量是 $\boldsymbol{\omega}$，现在要求此刚体的动能 T。我们把刚体看成质点系，则由定义

$$T=\sum_{i}\frac{1}{2}m_{i}\boldsymbol{v}_{i}^{2}$$

这里 $\sum$ 是对组成物体的一切质点取和，并且已经省略了质点编号的指标，由于速度

$$\boldsymbol{v}_{i}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{i}$$

以及

$$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{i})^{2}=(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{i})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{i})=[\boldsymbol{r}_{i}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{i})]\cdot\boldsymbol{\omega}$$
$$=[r_{i}^{2}\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_{i})\boldsymbol{r}_{i}]\cdot\boldsymbol{\omega}=\omega^{2}r_{i}^{2}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_{i})^{2}$$

因此动能 T 可以表示为

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i[\omega^2 r_i^2-(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_i)^2] \tag{5.1}$$

为了将动能用 $\boldsymbol{\omega}$、$\boldsymbol{r}$ 的分量来表示，先建立直角坐标系 $Oxyz$（它可以固连在刚体上，也可以固定在惯性系上），设

$$\boldsymbol{r}_i=x_i\boldsymbol{i}+y_i\boldsymbol{j}+z_i\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}$$

那么

$$T=\frac{1}{2}[\omega_x^2\sum m_i(y_i^2+z_i^2)+\omega_y^2\sum m_i(z_i^2+x_i^2)+\omega_z^2\sum m_i(x_i^2+y_i^2)$$

$$-2\omega_y\omega_z\sum m_iy_iz_i-2\omega_z\omega_x\sum m_iz_ix_i-2\omega_x\omega_y\sum m_ix_iy_i]$$

或者借助于矩阵，将动能 T 表示成

$$T=\frac{1}{2}\{\omega\}^T[J]\{\omega\} \tag{5.2}$$

其中$\{\omega\}$是列阵，$\{\omega\}^T$ 是它的转置，即

$$\{\omega\}^T=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$$

再方阵$[J]$为

$$[J]=\begin{pmatrix}\sum m_i(y_i^2+z_i^2) & -\sum m_ix_iy_i & -\sum m_ix_iz_i\\ -\sum m_ix_iy_i & \sum m_i(x_i^2+z_i^2) & -\sum m_iy_iz_i\\ -\sum m_ix_iz_i & -\sum m_iy_iz_i & \sum m_i(x_i^2+y_i^2)\end{pmatrix} \tag{5.3}$$

容易看出，$[J]$中主对角线上的三个元素分别是刚体绕三根坐标轴的转动惯量，它们分别记作

$$J_x=\sum m_i(y_i^2+z_i^2)$$
$$J_y=\sum m_i(z_i^2+x_i^2) \tag{5.4}$$
$$J_z=\sum m_i(x_i^2+y_i^2)$$

而将非对角元上的三个量分别记作

$$J_{xy}=\sum m_ix_iy_i,J_{yz}=\sum m_iy_iz_i,J_{zx}=\sum m_iz_ix_i \tag{5.5}$$

它们被称为关于坐标轴的惯量积（或简称惯积），其量纲与转动惯量的量纲相同。

若 $Oxyz$ 是固定系，它不附着于刚体上，则当时间变化时，$J_x,J_y,J_z,J_{xy},J_{yz},J_{zx}$ 不一定是常数。若 $Oxyz$ 固连在刚体上，则这六个量全

是常数，这当然很方便，以后不加说明时，$Oxyz$ 就是固连在刚体上的坐标系。

引进记号(5.4)式和(5.5)式以后，矩阵$[J]$可表示为

$$[J]=\begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

它的每个元素只和刚体本身的几何形状及质量分布有关，而与刚体的运动无关，这是描述刚体绕定点 O 转动时总体惯性的一种特征量，所以，这个矩阵就叫做刚体关于 O 点的**惯量矩阵**，显然它是三阶实对称矩阵。又因为$[J]$符合于二阶张量的定义，因此也常称为惯量张量。

(1) 惯量矩阵的计算

当已知刚体的几何形状和质量分布时，可以算出对刚体上任一点的惯量矩阵。因为刚体质量是连续分布的，所以在具体计算惯量矩阵的各个元素时，应将求和号 $\sum$ 改为相应的积分号，即

$$\begin{cases} J_x=\iiint\limits_{(V)}(y^2+z^2)\mathrm{d}m, & J_y=\iiint\limits_{(V)}(z^2+x^2)\mathrm{d}m \\ J_z=\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\mathrm{d}m, & J_{xy}=\iiint\limits_{(V)}xy\,\mathrm{d}m \\ J_{yz}=\iiint\limits_{(V)}yz\,\mathrm{d}m, & J_{zx}=\iiint\limits_{(V)}zx\,\mathrm{d}m \end{cases} \tag{5.7}$$

另外，由定义可知，一个物体的转动惯量(或惯量积)等于它的各部分转动惯量(或惯量积)之和。

例 5.1 如图 5-1 所示，一均质长方体，质量为 M，棱长分别为 a、b、c。试求其关于 O 点的惯量矩阵$[J]$。

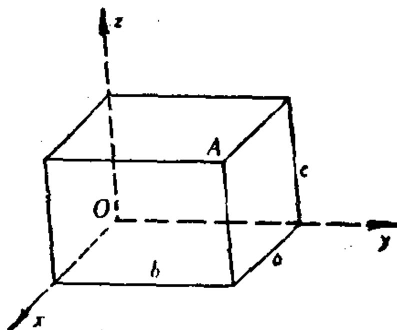


图 5-1

【解】设物体的密度是 μ，则有

$$\mu=\frac{M}{abc}, \qquad \mathrm{d}m=\mu\mathrm{d}V=\mu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

先求 J_x，由(5.7)式

$$J_x=\iiint\limits_{(V)}(y^2+z^2)\mathrm{d}m$$

$$= \frac{\mu abc}{3}(b^2+c^2) = \frac{M}{3}(b^2+c^2)$$

又 $$J_{xy} = \iiint\limits_{(V)} xy\mu\,\mathrm{d}V = \frac{M}{4}ab$$

根据类似的计算，还可以求出其他各个元素，实际上由于 x、y、z 在计算式中位置相当，不难直接参照以上的结果，将其他元素写出来，最后得到

$$[J] = M\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(b^2+c^2) & -\frac{1}{4}ab & -\frac{1}{4}ac \\ -\frac{1}{4}ab & \frac{1}{3}(c^2+a^2) & -\frac{1}{4}bc \\ -\frac{1}{4}ac & -\frac{1}{4}bc & \frac{1}{3}(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

(2) 惯量主轴

设 $Oxyz$ 是某刚体的固连坐标系，则可算得 O 点的惯量矩阵 $J_{xyz}(O)$，即(5.6)式。由于它是三阶实对称矩阵，因此，总可找到三个主方向，设 $O1$、$O2$、$O3$ 三条轴沿此方向，则惯量矩阵 $J_{123}(O)$ 就化为对角阵。这三个方向称为 O 点的**惯量主轴**，而相应的三个对角元就称为主转动惯量，记作 A、B、C，即有

$$[J_{123}(O)] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

我们称 $O123$ 系为 O 点的固连主轴系，所以，Oz 轴是惯量主轴的充要条件是

$$J_{zx} = 0,\ J_{zy} = 0 \tag{5.9}$$

那么，怎样寻找刚体的惯量主轴呢？我们可以通过下面几个办法来寻找。

i) 如果刚体在 O 点的两个主转动惯量相等，设 $A = B \neq C$，则 $O_{1,2}$ 平面内的任意方向都是 O 点的惯量主轴，这时我们称 $O3$ 轴为**动力对称轴**。

ii) 如果三个主转动惯量相等，即 $A = B = C$，则过 O 点的任一方向都是惯量主轴，这时可任取三个互相垂直的轴作为 O 点的主轴系。

iii）利用刚体质量分布的对称性。显然，质心G的位置和惯量主轴的方向应该具有同样的对称性。例如，若物体具有对称平面，则质心应在此平面内，其两条惯量主轴也应在此平面内，而第三条主轴则垂直于此平面。事实上，对于对称平面上的任一点O，如Oz轴与该面相垂直，则Oz必是O点的惯量主轴，因为由对称性，点(x,y,z)与另一点$(x,y,-z)$的质量相同，所以

$$\sum m_i x_i z_i = \sum m_i y_i z_i = 0$$

特别对于分布在同一个平面内的质点系（如薄板），有$A=\sum m_i y_i^2$，$B=\sum m_i x_i^2$，而$C=A+B$。又如，若物体具有n角对称轴（如果物体绕某轴转过$2\pi/n$弧度的角后，物体的质量分布不变，就称此轴为n角对称轴，其中n为大于2的自然数），则此轴是该轴上任一点的惯量主轴，而且质心必在此轴上，所以它是**中心惯量主轴**（例如对于均质正方体，过质心且与任一棱平行的轴都是四角对称轴，见图5-2）。事实上，设z轴是n角对称轴，则每一个垂直于它的主轴，例如x轴，当旋转$2\pi/n$弧度的角度（不等于π弧度）后，仍为主轴，这仅当$A=B$时才可能。因此，n角对称轴一定是动力对称轴。

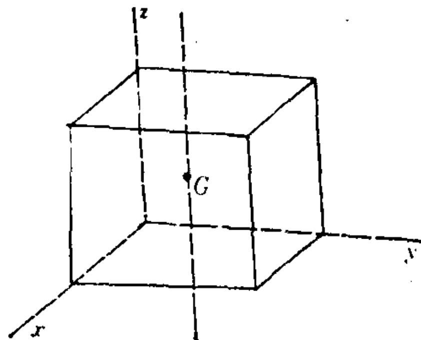


图 5-2

iv）若$Gxyz$是过质心的主轴系，P是中心惯量主轴（例如Gz）上任意一点，如果作Px'与Gx相平行，Py'与Gy相平行等，则$Px'y'z'$是P点的主轴系。因为此时有$J_{x'y'}=J_{y'z'}=J_{z'x'}=0$。

规则均质物体的中心主转动惯量见表5.1。

例 5.2 如图5-3所示，有一质量为M、半径为R的匀质球体，O为球面上任一点，试求O点的三条惯量主轴$O1$，$O2$，$O3$，以及相应的主转动惯量A、B、C。

【解】 设G为球心，如图5-3所示。

(1) 建立主轴系$O123$。

取$O3°$轴为过O点的直径，则$O3$轴是O点的中心惯量主轴。又因

表5.1

物体	简图	转动惯量
长方薄板		$J_x=\frac{1}{12}Mb^2$　$J_y=\frac{1}{12}Ma^2$ $J_z=\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$
正六面体		$J_x=\frac{1}{12}M(b^2+c^2)$ $J_y=\frac{1}{12}M(c^2+a^2)$ $J_z=\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$
圆薄板		$J_x=J_y=\frac{1}{4}MR^2$ $J_z=\frac{1}{2}MR^2$
圆柱		$J_x=J_y=\frac{1}{4}MR^2+\frac{1}{12}Mh^2$ $J_z=\frac{1}{2}MR^2$
（空心） 圆球 （实心）		$J_x=J_y=J_z=\frac{2}{3}MR^2$ $J_x=J_y=J_z=\frac{2}{5}MR^2$

$O3$ 轴是任意角旋转对称轴，所以在 O 点切平面内过 O 点的任一直线都是惯量主轴。现取 $O1$ 轴与 $O2$ 轴相垂直，则 $O123$ 系即为主轴系。

(2) 主惯量。先求关于任一直径的转动惯量。

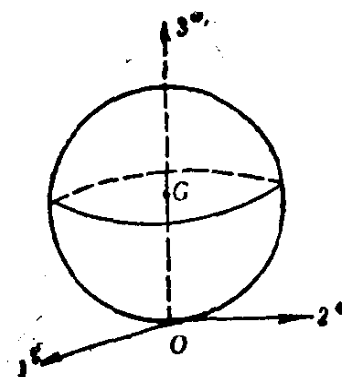


图 5-3

因为

$$C=\iiint\limits_{(球)}(x^2+y^2)\mathrm{d}\,m$$

对于球坐标系(原点为 G, 径向距离为 r, 经度角为φ^2 和纬度角为θ),有 $\mathrm{d}\,m=\rho r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$,则

$$C=\rho\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R(r^2\cos^2\theta)r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\rho\pi R^3\right)R^2=\frac{2}{5}MR^2$$

由平行移轴定理,得

$$A=B=\frac{2}{5}MR^2+MR^2=\frac{7}{5}MR^2$$

2. 刚体的动能

在第三章中已经讨论过刚体作平面运动时的动能。现在要求刚体作定点转动和一般运动时的动能公式。

设刚体作定点转动,O 为定点,刚体关于固连系 $Oxyz$ 的惯量矩阵由(5.6)式表示,刚体的角速度矢量为 $\boldsymbol{\omega}$,其分量为 $(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$,则由(5.2)式可得其动能为

$$T=\frac{1}{2}\{\omega\}^T[J(O)]\{\omega\}$$

$$=\frac{1}{2}(J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2-2J_{xy}\omega_x\omega_y$$

$$-2J_{yz}\omega_y\omega_z-2J_{zx}\omega_z\omega_x) \tag{5.10}$$

如果 $Oxyz$ 就是 O 点的主轴系 $O123$,则动能表示式就特别简单,为

$$T=\frac{1}{2}(A\omega_1^2+B\omega_2^2+C\omega_3^2) \tag{5.11}$$

其中 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$,是角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在 $O123$ 系中的投影。

若刚体作一般运动，则由寇尼希定理，可得其动能为

$$T=\frac{1}{2}Mv_G^2+\frac{1}{2}\{\omega\}^T[J(G)]\{\omega\} \tag{5.12}$$

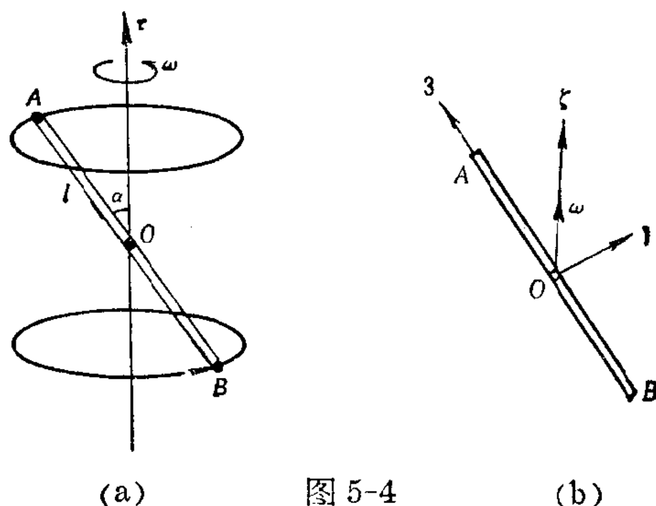
其中 G 为刚体的质心。如 $G123$ 为主轴系，则有

$$T=\frac{1}{2}Mv_G^2+\frac{1}{2}(A\omega_1^2+B\omega_2^2+C\omega_3^2) \tag{5.13}$$

其中 A、B、C 是中心主转动惯量，$\boldsymbol{v}_G$ 是质心的速度。

例 5.3 匀质杆 AB（质量为 m，长为 $2l$）绕固定轴 $O\zeta$ 作定轴转动，角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，AB 杆与 $O\zeta$ 的夹角为常数 α（图 5-4 *a*）。试求 AB 杆的动能 T。

【解】 杆 AB 绕 $O\zeta$ 轴的转动可看作是绕 O 点的定点转动。先找过 O 点的三条主轴：$O3$ 轴沿 AB 杆，$O1$ 轴在由 OA、$O\zeta$ 所决定的平面内，并与 OA 轴垂直（图 *b*），则



(a) 图 5-4 (b)

$$A=J_1=\frac{1}{3}ml^2,\ B=J_2=\frac{1}{3}ml^2,\ C=0$$

$$\omega_1=\omega\sin\alpha,\ \omega_3=\omega\cos\alpha,\ \omega_2=0$$

由(5.11)式得

$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2\sin^2\alpha=\frac{1}{6}ml^2\omega^2\sin^2\alpha$$

例 5.4 设匀质车轮（半径为 r，质量为 M）沿水平面上半径为 R（圆心为 O_1）的圆周轨道作纯滚动，且轮面始终保持竖直（图 5-5 *a*）。

已知轮心 G 具有常速率 u，试求车轮的动能表达式。

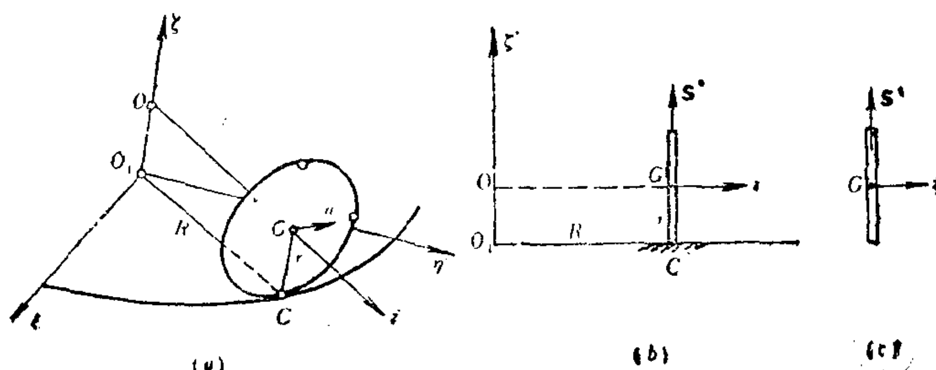


图 5-5

【解】 车轮作定点运动，定点为 O，OG 与盘面相垂直，在第一章的例 1.13 中已经求得轮子的角速度为

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{u}{R}\boldsymbol{\zeta}^{\circ}-\frac{u}{r}\boldsymbol{z}^{0} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{z}^0$ 是 $\boldsymbol{OG}$ 的单位矢量，因此可按照(5.11)式求车轮的动能。但因 O 点在轮子的扩大体上，求 O点的主惯量不方便，因此可以把轮子的运动看作为一般运动。先找质心 G 的三条主轴：将 Gz 取作 $G3$ 轴（它是轮子的任意角对称轴），则轮面上的任一条直径都是 G 点的主轴。只要取两条相互垂直的直径就可作为 $G1$、$G2$ 轴，为了使得 $\boldsymbol{\omega}$ 在主轴系上的投影式更为简单，当存在动力对称轴时（设 $A=B$），常建立莱沙尔(Re sal)主轴坐标系来代替固连在刚体上的主轴系。

莱沙尔坐标系 $GNSZ$ 是右手系，$\boldsymbol{N}^0$ 是节线方向的单位矢量，$\boldsymbol{Z}^0$ 是沿物体动力对称轴的单位矢量，$\boldsymbol{S}^0=\boldsymbol{Z}^0\times\boldsymbol{N}^0$，$\boldsymbol{Z}^0$、$\boldsymbol{\zeta}^0$、$\boldsymbol{S}^0$ 在同一平面内。莱沙尔坐标系是一种动坐标系，其特点是它本身相对于惯性系（固定系）是运动的，而刚体又在该坐标系中作定轴转动，莱沙尔坐标架的运动包含了刚体的进动和章动两部分，由于坐标原点 G 的主惯量中 $A=B$，所以，虽然莱沙尔系不与刚体固连，但它也是刚体上 G点的主轴系，且有

$$\omega_1^2(t)+\omega_2^2(t)=\omega_N^2+\omega_S^2$$

建立轮心 G 的莱沙尔系 $GNSZ$，如图 c，把轮子看作圆盘，算得

$$J_N = J_S = \frac{1}{4}Mr^2,\ J_z = \frac{1}{2}Mr^2$$

由(1)式可得

$$\omega_N = 0,\ \omega_S = \frac{u}{R},\ \omega_Z = -\frac{u}{r}$$

代入(5.13)式，得

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}Mr^2\left(\frac{u^2}{R^2} + 2\frac{u^2}{r^2}\right) \\ &= \frac{3}{4}Mu^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^2 Mu^2 \end{aligned}$$

3. 刚体的动量矩主矢

设刚体绕定点 O 转动，角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，则矢径为 $\boldsymbol{r}$ 的点，其速度为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

由动量矩的定义(3.11)式知

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_O &= \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{r}_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)] \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n}(m_i r_i^2)\right]\boldsymbol{\omega} - \sum_{i=1}^{n}[m(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{r}_i] \end{aligned} \tag{5.14}$$

设 $Oxyz$ 为固连系，将 $\boldsymbol{H}_O$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 的直角坐标分量分别记作列阵

$$\{H_O\} = \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} \qquad \{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \tag{5.15}$$

则可将(5.14)式化为

$$\{H_O\} = [J(O)]\{\omega\} \tag{5.16}$$

其中$[J(O)]$是 O 点的惯量矩阵。上式在$Oxyz$ 系的投影式为

$$\begin{cases} H_x = J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z \\ H_y = J_y\omega_y - J_{xy}\omega_x - J_{yz}\omega_z \\ H_z = J_z\omega_z - J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y \end{cases} \tag{5.17}$$

如果取 O 点的主轴系 $O123$，$O1$ 轴、$O2$ 轴、$O3$ 轴上的单位矢分别为 $\mathbf{1}^\circ$、$\mathbf{2}^\circ$、$\mathbf{3}^\circ$，则动量矩的表达式就特别简单，为

$$\boldsymbol{H}_O = A\omega_1\mathbf{1}^0 + B\omega_2\mathbf{2}^0 + C\omega_3\mathbf{3}^0 \tag{5.18}$$

刚体作一般运动时，求关于质G的动量矩 H_G 时，若把刚体的运动分解为随质心G的平动和绕质心的转动，就可同理算出

例 5.5 试求例 5.4 中轮子关于其质心的动量矩 $\boldsymbol{H}_G$ 和关于定点 O 的动量矩 $\boldsymbol{H}_O$。

【解】 取轮心 G 的莱沙尔主轴系 $GNSZ$（同例 5.4），又因 O 点在中心惯量主轴上，容易建立 O 点的莱沙尔主轴系 $ON'S'Z$，则

$$\boldsymbol{H}_G=\frac{1}{4}Mr^2u\left(\frac{1}{R}\boldsymbol{S}^0-\frac{2}{r}\boldsymbol{Z}^0\right)$$

$$\boldsymbol{H}_O=\frac{Mu}{R}\left(\frac{1}{4}r^2+R^2\right)\boldsymbol{S}^0-\frac{1}{2}Mru\,\boldsymbol{Z}^0$$

4. 刚体定点运动的欧拉动力学方程

设刚体绕定点 O 转动，$O\xi\eta\zeta$ 为定系，O 123 为固连于刚体上的主轴系 $\mathbf{1}^\circ$、$\mathbf{2}^\circ$、$\mathbf{3}^\circ$ 分别为 O 1 轴、O 2 轴 O 3 轴上的单位矢量，则对 O 点的动量矩可表示为

$$\boldsymbol{H}_O=A\omega_1\mathbf{1}^0+B\omega_2\mathbf{2}^0+C\omega_3\mathbf{3}^0 \tag{5.19}$$

又根据第三章对固定点 O 的动量矩定理，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{L}_O \tag{5.20}$$

其中 $\boldsymbol{L}_O$ 是刚体上的外力系对 O 点的主矩，而左端是 $\boldsymbol{H}_O$ 对惯性系的绝对导数，因为(5.19)式是 $\boldsymbol{H}_0$ 在动坐标系中的表示式，则根据矢量相对导数的公式，有

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{定}}=\left(\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{刚}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H}_O$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 是刚体的角速度，将上式代入(5.20)式，就得到

$$\left(\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{刚}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H}_O=\boldsymbol{L}_O \tag{5.21}$$

它在 O 123 系中的三个投影方程为

$$\begin{cases}A\dot{\omega}_1+(C-B)\omega_2\omega_3=L_1\\B\dot{\omega}_2+(A-C)\omega_3\omega_1=L_2\\C\dot{\omega}_3+(B-A)\omega_1\omega_2=L_3\end{cases} \tag{5.22}$$

这就是刚体作定点转动的动力学方程，称为**欧拉动力学方程**。应该注意，在利用这个方程时，坐标系 $O123$ 是固连于刚体的主轴系。

欧拉动力学方程(5.22)是 ω_1、ω_2、ω_3 的一组非线性微分方程，在已知其右端的力矩(即使力矩 L_1、L_2、L_3 很简单)的情况下，要由这组方程求出运动情况(分析解)是十分困难的。最著名的就是重刚体的定点转动，即刚体只在重力作用下绕固定点的转动问题，它是单摆运动的自然推广，但自1758年以来，特别在十八、十九世纪曾引起了许多著名数学家和力学家的兴趣，进行了大量的研究工作，虽然得到了许多美妙的结果，但仍没有完全解决。至今，已有这样的结论：在一般起始条件下，重刚体绕定点的运动只有下面三种情形能够得到分析解，即

(1) 欧拉-班锁情形，即刚体对定点O的外力矩为零(固定点O与重心相重合)，而刚体本身可有任意形状。当时首先由欧拉在1758年给出了分析解，后来，1834年班锁作出了巧妙的几何解释。若把地球看成是轴对称的扁球体($A=B$)，并忽略由太阳和月亮作用在地球上的引力矩，而地球的自转轴并不与动力对称轴相重合，所以地球的自转运动就是欧拉情形的刚体定点运动。

(2) 拉格朗日-泊松情形，即刚体具有过定点O的动力对称轴(设 $A=B\neq C$)，且重心在对称轴上。玩具陀螺就属于这种情形。这是拉格朗日(1788年)和泊松(1815年)研究解决的。

(3) 柯瓦列夫斯卡娅情形，这是俄国女数学家柯瓦列夫斯卡娅在1888年解决的。这时刚体对O点的主惯量间成立 $A=B=2C$ (伸长的旋转椭球)，而且重心在垂直于动力对称轴的平面上。

另一方面，如果已知刚体的定点转动规律，则由欧拉动力学方程可以方便地计算出刚体上所受到的力矩 L_1、L_2、L_3。例如在机械设计中，许多转动部件(作定轴转动)是轴对称的，但由于制造或者装配中的误差，使转轴不与惯量主轴相重合，虽然两者之间的夹角很小，但当部件高速转动时力矩(由轴承的约束反力提供)却很大，利用欧拉动力学方程就可求出轴承上的动压力，见例5.7。

刚体定点运动问题当然也可用拉氏方程求解，但如取三个欧拉角为广义坐标，则所得到的方程在形式上与直接用欧拉动力学方程所得

到的方程不完全相同。

例 5.6 刚体以质心 O 为固定点转动，没有外力矩，试讨论刚体绕过 O 点的惯量主轴转动时的稳定性。

【解】 在刚体上建立固连主轴系 $O123$。设刚体对 O 点的主惯量 A、B、C 互不相等，不妨设 $A>B>C$，刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 沿最小惯量主轴 $O3$ 方向，且沿 $O1$，$O2$ 方向受到小的扰动，即

$$\omega_1(0)=\text{小量},\omega_2(0)=\text{小量},\omega_3(0)=\text{常数}\neq 0 \tag{1}$$

要问在运动过程中 $\omega_1(t)$ 和 $\omega_2(t)$ 是否仍为小量？

由欧拉动力学方程(5.22)式，其第一、二式现在成为

$$A\dot{\omega}_1(t)+(C-B)\omega_2(t)\omega_3(t)=0$$

$$B\dot{\omega}_2(t)+(A-C)\omega_3(t)\omega_1(t)=0$$

将上面两式分别乘以 $(C-A)\omega_1(t)$ 和 $(C-B)\omega_2(t)$，然后相加得

$$A(C-A)\omega_1\dot{\omega}_1+B(C-B)\omega_2\dot{\omega}_2=0$$

上式对时间积分，即得

$$A(C-A)\omega_1^2(t)+B(C-B)\omega_2^2(t)=\text{常数} \tag{2}$$

而

$$A(C-A)\omega_1^2(0)+B(C-B)\omega_2^2(0)=\text{小量} \tag{3}$$

因为 $C<A$，$C<B$，所以(2)式左端两项均为负，又由(3)式可知 $\omega_1(t)$ 和 $\omega_2(t)$ 都是小量。

又因刚体的机械能守恒，即

$$A\omega_1^2(t)+B\omega_2^2(t)+C\omega_3^2(t)=A\omega_1^2(0)+B\omega_2^2(0)+C\omega_3^2(0) \tag{4}$$

则可得

$$\omega_3(t)-\omega_3(0)=\text{小量} \tag{5}$$

即 $\omega_3(t)$ 的变化也是小量，因此刚体绕最小惯量主轴的转动是稳定的。同理可证，绕最大惯量主轴(即 $O1$ 轴)的转动也是稳定的。

刚体绕中间大小的惯量主轴 $O2$ 的转动则是不稳定的，这要利用契塔也夫的不稳定准则来证明，参阅文献 [8]。

技巧或跳水运动员作空翻动作时变换旋转方向(称为“晚旋”)正是利用了这个原理。运动员开始空翻时的旋转轴是人体的横轴，此轴是

个中间大小的惯量主轴，因此空翻运动不稳定，当运动员改变手臂的对称位置，使惯量主轴偏离人体的横轴时，就可发生绕纵轴的转体运动。

例 5.7 半径 $R=0.2$ m，质量 $M=40$ kg 的匀质薄圆盘绕固定轴 AB 以等角速转动，转速为 $n=12000$ r/min，由于安装的误差，使盘面法向与转轴不重合，其夹角为 $\alpha=1°$（见图 5-6 a，图中把 α 角夸大了），盘心 O 在转轴 AB 上。两轴承间的距离 $\overline{AB}=1$ m。求轴承上受到的动反力 N 为多大。

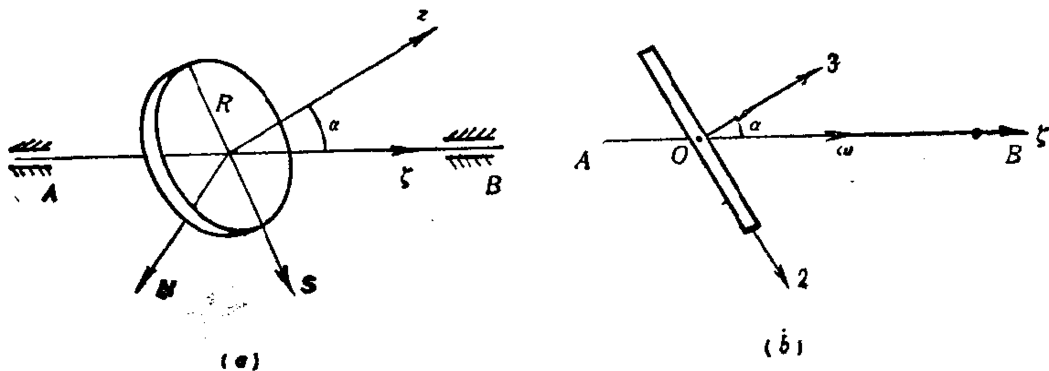


图 5-6

【解】 沿转轴作 $O\zeta$（定系）。建立固连主轴系 $O\,123$，设 $O\,3$ 轴沿盘面法向（图 5-6b），取 $\zeta O\,3$ 平面与圆盘的交线为 $O\,2$ 轴，而 $O\,1$ 轴与 $O\,2$、$O\,3$ 轴相垂直（$\mathbf{1}°$、$\mathbf{2}°$、$\mathbf{3}°$ 分别为 $O\,1$ 轴、$O\,2$ 轴、$O\,3$ 轴上的单位矢量）。圆盘和转轴组成的系统受到重力和轴承力矩 $\boldsymbol{L}$ 的作用，因

$$\boldsymbol{\omega}=\omega\cos\alpha\,\mathbf{3}^0+\omega\sin\alpha\,\mathbf{2}^0$$

$$\boldsymbol{L}=L_1\,\mathbf{1}^0+L_2\mathbf{2}^0+L_3\,\mathbf{3}^0$$

代入欧拉动力学方程(5.22)式，得

$$\begin{cases}(C-B)\omega_2\omega_3=L_1\\ \qquad\qquad\quad 0=L_2\\ \qquad\qquad\quad 0=L_3\end{cases}$$

已知

$$\omega=\frac{2\pi n}{60}=400\,\pi/\text{sec},\quad A=B=\frac{1}{4}MR^2=0.4\,\text{kg}\cdot\text{m}^2,$$

$$C=2A=0.8\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

代入上式，得

$$L_1 = \frac{1}{4} MR^2 \omega^2 \cos\alpha \sin\alpha = 11000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

这是两端轴承对轴的作用力所组成的力偶之矩，其方向沿节线 $O1$ 的正向，则每一轴承对轴的作用力大小为

$$N = \frac{L_1}{AB} = 11000\,N = 1.1\times 10^3 \text{ kg}$$

这是一个多么大的力！所以对高速转动的部件一定要达到动平衡，即不但要求转子的质心处在转轴上，而且要求转轴就是质心的惯量主轴。动平衡的办法是在转子上附加一些质量，使得转子平稳旋转而不发生颤动。

5．刚体一般运动的动力学方程

现在讨论在空间作一般运动的刚体的动力学方程。设刚体的质量为 M，质心在 G 点，$O\xi\eta\zeta$ 系固定于惯性参考系。刚体上外力系（包括主动力和约束力）的主矢是 $\boldsymbol{F}$，对 G 的主矩是 $\boldsymbol{L}$。

如果刚体只受到理想、完整约束，则可用第二类拉氏方程求解，当建立质心固连主轴系 $G123$ 后，动能就可按(5.13)式计算，根据主动力求出势能或算出相应的广义力，从而列出拉氏方程。由拉氏方程求出运动情况后，如果还要求未知的约束反力，则可由质心运动定理或关于质心的欧拉动力学方程求出。

如果刚体受到非完整约束，则拉氏方程不适用，可以改用牛顿方程，即质心运动定理和绕质心转动的欧拉动力学方程。

例 5.8 匀质杆 AB（质量为 M，长为 $2l$），其 A 端可沿铅直的光滑导线 $O\zeta$ 自由滑动，而 B 端与长为 $2l$ 的轻杆 OB 相铰接，O 为光滑球铰，整个系统可绕 $O\zeta$ 轴自由转动，如图5-7 a，试求 AB 杆的运动方程。

【解】 用拉氏法。把 OB 和 AB 看作为一个系统，它具有理想、完整、定常约束。系统的自由度 $n=2$，其广义坐标 $q_1=\theta$（OB 杆与竖直轴夹角），$q_2=\varphi$（AOB 平面的转角）。AB 杆作一般运动，$G123$ 系如图 b 所示。主惯量 $A=B=\frac{1}{3}Ml^2$，$C=0$，角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \dot{\theta}\,\mathbf{1}^0 + \dot{\varphi}\sin\theta\,\mathbf{2}^0 + \dot{\varphi}\cos\theta\,\mathbf{3}^0 \qquad (1)$$

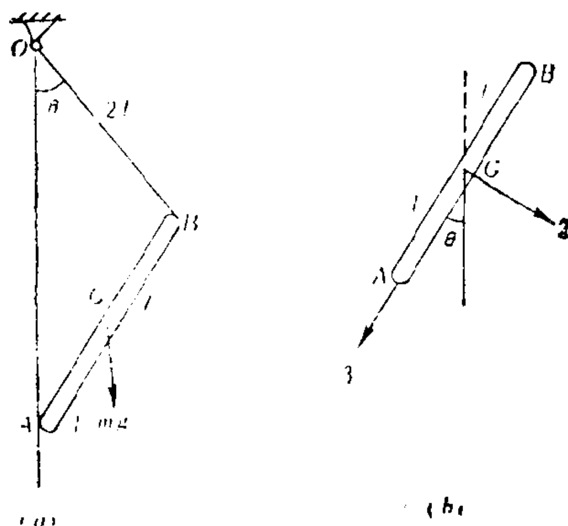


图 5-7

质心速度为

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AG}$$

$$= -4l\sin\theta\dot{\theta}\ (\sin\theta\,\mathbf{2}^0 + \cos\theta\,\mathbf{3}^0) - l\dot{\varphi}\sin\theta\,\mathbf{1}^0 + l\dot{\theta}\,\mathbf{2}^0$$

$$= -l\dot{\varphi}\sin\theta\,\mathbf{1}^\circ + l\dot{\theta}(1-4\sin^2\theta)\mathbf{2}^\circ - 4l\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\,\mathbf{3}^\circ \quad (2)$$

动能为

$$T = \frac{1}{2}Ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta + 8\dot{\theta}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}Ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) = \frac{2}{3}Ml^2[(1+6\sin^2\theta)\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta] \quad (3)$$

势能为

$$U = -3Mgl\cos\theta$$

将上面各式代入有势系统的拉氏方程(4.33)式，即得

$$\begin{cases} \frac{4}{3}Ml^2(1+6\sin^2\theta)\ddot{\theta} - \frac{2}{3}Ml^2\sin 2\theta(-6\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + 3Mgl\sin\theta = 0 \\ \dot{\varphi}\sin^2\theta = \text{常数} \end{cases} \quad (4)$$

6. 陀螺仪近似理论

在工程技术中把具有一个固定点并绕自身对称轴高速转动的物体称为陀螺。设参考体 S 中装有一个旋转对称的转子，这个转子在

S中以角速度$\boldsymbol{\Omega}$转动(图 5-8)。设C是转子绕自身轴的转动惯量，那么刚体在参考体S中的动量矩是

$$\boldsymbol{H}=C\boldsymbol{\Omega} \tag{5.23}$$

这里没有特别说明$\boldsymbol{H}$的矩心是哪一点，这是因为旋转体的质心在转动轴上，其速度为零。由(3.15)式知，对哪一个矩心取动量矩都是一样的。

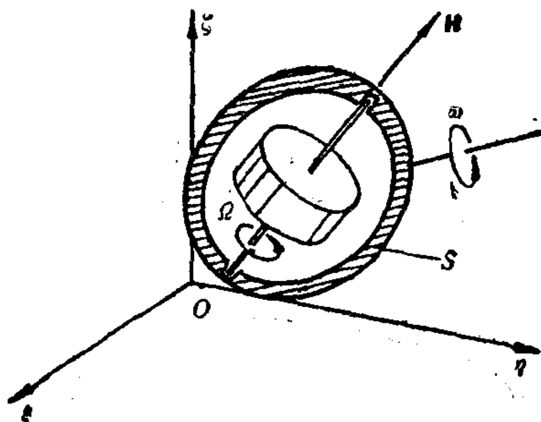


图 5-8

如果参考体S本身在惯性系(图中$O\xi\eta\zeta$系)中运动(作一般运动)，它的瞬时角速度为$\boldsymbol{\omega}$，这样旋转体对于惯性系的角速度为$\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\omega}$，其动量矩将与$\boldsymbol{\omega}$有关。现在我们进一步假设$\boldsymbol{\Omega}$为常值，且

$$|\boldsymbol{\Omega}|\gg|\boldsymbol{\omega}| \tag{5.24}$$

于是

$$\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\omega}\doteq\boldsymbol{\Omega}$$

这就是考虑所谓高速转子的运动情况。作为一种近似处理方法，我们可以认为，高速转子在惯性空间中对质心的动量矩与$\boldsymbol{\omega}$无关，仍然是$\boldsymbol{H}=C\boldsymbol{\Omega}$，而且与矩心无关。

当参考体S缓慢运动时，矢量$\boldsymbol{\Omega}$本身作缓慢的运动，因而$\boldsymbol{H}$的方向也在作缓慢的变动。在惯性系中应用对质心的动量矩定理，得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{L} \tag{5.25}$$

$\boldsymbol{L}$是加在转子上的外力矩。因为$\boldsymbol{H}$与矩心无关，$\boldsymbol{L}$也与矩心无关，因

此外力系简化的结果一定是一个力偶。通常这个力偶是参考体 S 通过与转子的接触处（如轴承）而给予转子的。反过来，高速转子对 S 的反作用也是一个力偶，这个力偶的矩叫做**陀螺力矩**或**回转力矩**，即

$$\boldsymbol{L}_{回}=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=-C\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} \tag{5.26}$$

因为 $\boldsymbol{\Omega}$ 是常值，即

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}=0$$

所以有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Omega} \tag{5.27}$$

最后得到

$$\boldsymbol{L}_{回}=C\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega} \tag{5.28}$$

它是转子作用在其他物体上的力矩。

§5.2 相对运动动力学

第三章中强调指出，牛顿定律只在惯性（无加速度的）参考系中适用，然而许多物理现象有时在非惯性系中观察却更为简单。例如要作人造卫星的短期位置预报时，需要考虑地球自转的影响，这时要把地心平动系作为惯性系，地球是非惯性系，然而人们是习惯于在地球上来观察卫星运动的，那么，怎样在非惯性系中来讨论问题呢？下面来讨论这个问题。

1. 牛顿法

将牛顿定律作适当的修正后可以适用于非惯性系。设 $O_1\xi\eta\zeta$ 是惯性参考系（简称定系），$Oxyz$ 是非惯性参考系（简称动系），$\boldsymbol{F}$ 是作用在质量为 m 的质点上的力，则在惯性系中牛顿定律成立，即

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F} \tag{5.29}$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 是质点的绝对加速度，根据点的加速度合成公式有（符号意义同前）：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_c \tag{5.30}$$

其中 $\boldsymbol{a}_r$ 就是质点相对于非惯性系 $Oxyz$ 的加速度，将(5.30)式代入(5.29)式，可得

$$m\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{F}+(-m\boldsymbol{a}_e)+(-m\boldsymbol{a}_c) \tag{5.31}$$

这就可看成是非惯性系中的牛顿定律，它在形式上与牛顿定律相类似，但其右端除了真实力 $\boldsymbol{F}$ 外，还附加了两个力，一个等于$(-m\boldsymbol{a}_e)$，另一个等于$(-m\boldsymbol{a}_c)$，分别称为**牵连惯性力**(记作 $\boldsymbol{F}_e$) 与**柯氏惯性力**(记作 $\boldsymbol{F}_c$)。因此如果把假想的牵连惯性力和柯氏惯性力与真实力一起作用到质点上以后，牛顿定律在形式上对非惯性系也就成立了，而这些惯性力与动系的运动以及质点相对于动系的运动是有关的。

如果以 $\boldsymbol{\omega}$ 表示非惯性系 $Oxyz$ 对于惯性系 $O_1\xi\eta\zeta$ 的角速度，$\boldsymbol{\varepsilon}$是相应的角加速度，$\boldsymbol{r}$ 表示质点对非惯性系原点 O 的矢径，又以 $\boldsymbol{a}_O$ 表示O点的加速度，则

$$\boldsymbol{a}_e=\boldsymbol{a}_O+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{5.32}$$

$$\boldsymbol{a}_c=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r \tag{5.33}$$

其中 $\boldsymbol{v}_r$ 是质点相对于非惯性系的速度。

对于一个质点的讨论完全可以推广到质点系。这里不再重复。

2. 拉氏法

利用第二类拉氏方程也可以讨论相对运动动力学问题。对质点和质点系可以同样处理，而且想法很简单，即若已知非惯性系 $Oxyz$ 相对于惯性系 $O_1\xi\eta\zeta$ 的运动(具有非定常约束)，则质点或质点系对于惯性系的绝对坐标可以表示为非惯性系中广义坐标的函数，因此只要把相对于非惯性系的量取作广义坐标，然后列出关于惯性系的动能、势能和虚功的表达式，再代入第二类拉氏方程即可求得相对运动微分方程。

从相对运动微分方程很容易求得相对平衡(静止)的方程，因此可求得相对平衡位置。这只要在(5.31)式中令 $\boldsymbol{a}_r=0$，$\boldsymbol{v}_r=0$ 就可以了，所以相对平衡方程是

$$\boldsymbol{F}+(-m\boldsymbol{a}_e)=0 \tag{5.34}$$

由于 $\boldsymbol{F}$ 中包括主动力和约束力，所以(5.34)式实际上代表主动力系、约束力系和(牵连)惯性力系，这三个力系组成平衡力系。

例 5.9 如图 5-9 所示，水平圆盘以常角速 ω 绕O轴转动，盘上有

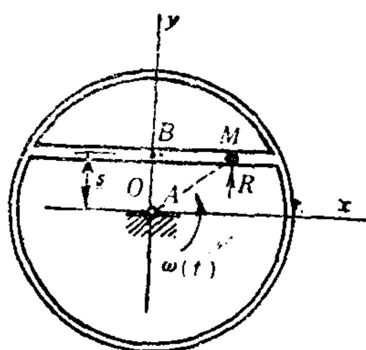
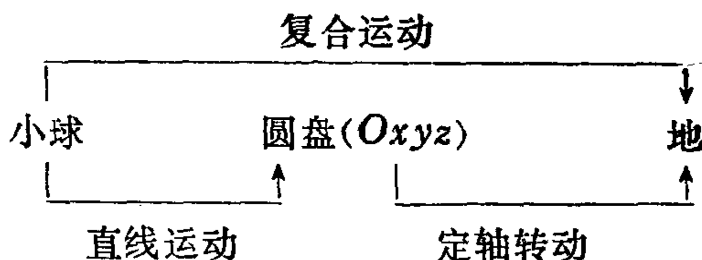


图 5-9

一光滑直槽，离 O 轴的距离为 s，质量为 m 的小球在槽内运动，初始时小球与直槽中点的距离为 x_0，初速度为 v_0，方向为离开槽的中点向外。试求小球相对于直槽的运动和槽对小球的横向反力 $\boldsymbol{R}$。

【解】 这是相对运动问题，先作框图如下。



【解法一】 牛顿法。质点上受到的真实力是

$$\boldsymbol{F}=R\,\boldsymbol{j}$$

牵连惯性力为

$$\boldsymbol{F}_e=-m\,\boldsymbol{a}_e=-m(-\omega^2x\,\boldsymbol{i}-\omega^2s\,\boldsymbol{j})$$

柯氏惯性力为

$$\boldsymbol{F}_c=-2\,\omega\boldsymbol{k}\times\dot{x}\boldsymbol{i}=-2\,m\omega\,\dot{x}\,\boldsymbol{j}$$

相对加速度是

$$\boldsymbol{a}_r=\ddot{x}\boldsymbol{i}$$

代入相对运动方程(5.31)式，并在 x、y 轴方向分解，可得

$$\begin{cases} m\ddot{x}=m\omega^2x & (1)\\ 0=m\omega^2s-2\,m\omega\,\dot{x}+R & (2)\end{cases}$$

由(1)式及初始条件可解得

$$x=x_0\operatorname{ch}\omega t+\frac{v_0}{\omega}\operatorname{sh}\omega t \tag{3}$$

将上式代入(2)式，即得

$$R=2\,m\omega^2\left(x_0\operatorname{sh}\omega t+\frac{v_0}{\omega}\operatorname{ch}\omega t\right)-m\omega^2s \tag{4}$$

【解法二】 拉氏法。质点具有理想、完整、非定常约束，$n=1, q_1=x$（质点相对于圆盘的坐标）。

$$T=\frac{1}{2}mv_a^2=\frac{1}{2}m[\omega^2(x^2+s^2)+\dot{x}^2-2\omega s\dot{x}]$$

$$U=0, \qquad \widetilde{Q}_x=0$$

由于 T 和 U 中不显含时间 t，因此存在广义能量积分，即

$$T_2-T_0=m[\dot{x}^2-\omega^2(x^2+s^2)]=\text{常数} \tag{5}$$

(5)式的解与(3)式相同。为了求出横向反力 $\boldsymbol{R}$（是已知运动求力），可用牛顿法，即得(2)式。

又，在(1)式中令 $\ddot{x}=0$，可得相对平衡位置 $x=0$（直槽中点），但这是不稳定的，由(3)式可知，只要受到极微小的干扰（$x_0\neq0$ 或 $v_0\neq0$），当 $t\to\infty$ 时，质点将远离此平衡位置。

例 5.10 匀质细杆 OA（长为 l，质量为 M）可在竖直平面内绕水平轴 Oz 自由摆动，而 Oz 轴本身又绕过 O 点的固定竖直轴 $O\zeta$ 以等角速 ω 转动，方向朝上，如图 5-10 a，不计摩擦，试求摆的相对运动微分方程。

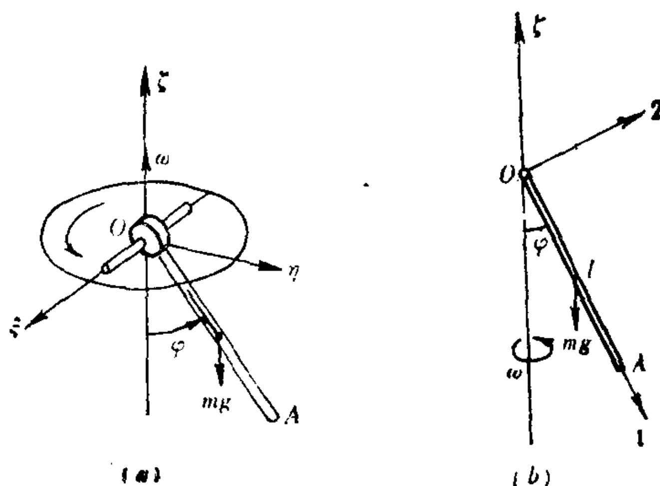


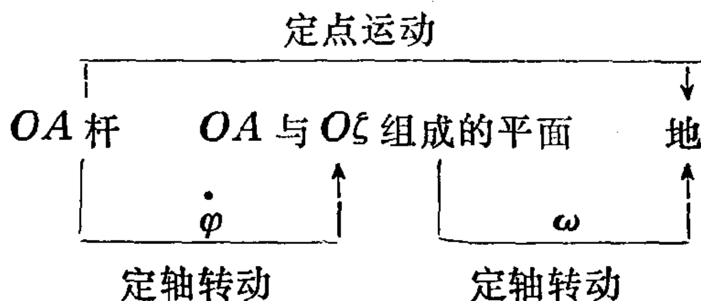
图 5-10

【解】 OA 杆（刚体）作复合运动，画出其框图（见下页）。所以 OA 杆绕 Oz 轴的摆动是相对运动，现在用拉氏方法，取 OA 杆为对象，约束是理想、完整和非定常的（以 ω 转动）。$n=1, q_1=\varphi$（相

对转角)，取 O 点的固连主轴系 $O\,123$，$O\,1$ 轴沿 OA，$O\,2$ 轴即为 OA 的摆动轴。如图 b，则有

$$J_1 = 0$$

$$J_2 = J_3 = \frac{M}{3}l^2$$



又，杆的角速度为

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \omega(-\cos\varphi\,\mathbf{1}^0 + \sin\varphi\,\mathbf{2}^0) + \dot{\varphi}\,\mathbf{3}^0$$

所以

$$T = \frac{1}{2}(J_2\Omega_2^2 + J_3\Omega_3^2) = \frac{M}{6}l^2(\dot{\varphi}^2 + \omega^2\sin^2\varphi)$$

$$U = -\frac{l}{2}Mg\cos\varphi$$

代入拉氏方程，即得杆的相对运动微分方程为

$$\ddot{\varphi} + \frac{3g}{2l}\sin\varphi = \omega^2\sin\varphi\cos\varphi$$

例 5.11　地球自转所产生的影响——落体偏东。

如果取地心平动系作为惯性系，则可认为地球在此参考系中作等角速的定轴转动，其转动角速度为

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 7.27\times10^{-5}/\mathrm{s}$$

(地球绕动力对称轴自转一圈的时间为 23 小时 56 分 4 秒，即称为一个恒星日)，虽然 ω 的数值很小，但在某些问题中必须计入它的影响，因此地球本身是一个非惯性参考系，把地球作为非惯性系，可以得到一些重要的结果。例如铅垂线并不通过地球中心；自由落体要偏东；北半球

河流右岸的冲刷甚于左岸；而铁轨因右轨所受的压力大于左轨，所以磨损较严重，这些现象主要是由柯氏惯性力引起的。

现在就来讨论当物体由高为 h 处自由下落时，物体落到地面时的位置。

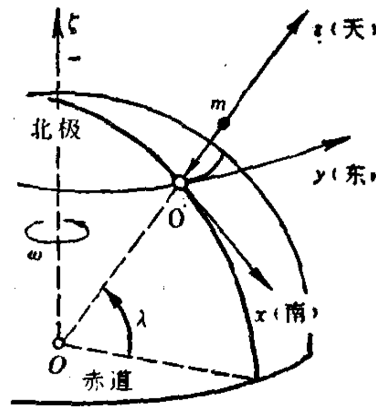


图 5-11

【解】 我们用牛顿法来求解。

取定质点(物体)为讨论对象，由于是自由质点，自由度 $n=3$。它所受到的约束为完整的，因考虑地球自转，有非定常约束($\varphi=\omega t$)。

设物体在地球 O' 点的上空自由下落，O' 点在北半球，纬度为 λ。见图 5-11。

设 $O\xi\eta\zeta$ 为地心坐标系(惯性系)，地球自转角速度沿地轴 ζ 方向。作 $O'xyz$ 固连于地球表面，$O'x$ 轴水平向南，$O'y$ 轴水平向东，$O'z$ 轴竖直向上，如图。

由于地球自转，O' 点的当地铅垂线方向与半径 OO' 间有夹角 α，且

$$\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{R\omega^2}{2g}\sin 2\lambda\right)$$

其中 R 为地球半径。因为 ω 很小，所以 α 角也很小。当略去含 ω^2 的项时，$\alpha=0$，$O'z$ 轴就通过地心 O 点，见参考文献[2]。

根据牛顿法的相对运动动力学方程(5.31)式

$$m\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{F}-m\boldsymbol{a}_e-m\boldsymbol{a}_c \tag{1}$$

现设动系 $O'xyz$ 各坐标轴的单位矢量分别为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a}_r=\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_c&=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r=2\omega(-\cos\lambda\boldsymbol{i}+\sin\lambda\boldsymbol{k})\times(\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k})\\&=2[-\dot{y}\sin\lambda\boldsymbol{i}+(\dot{x}\sin\lambda+\dot{z}\cos\lambda)\boldsymbol{j}-\dot{y}\cos\lambda\boldsymbol{k}]\end{aligned}$$

因 $\boldsymbol{F}$ 是地心引力，$(-m\boldsymbol{a}_e)$ 是牵连惯性力，这两项之和就是物体在当地的重力，若不计含有 ω^2 的项，则重力指向地球中心 O 点，即

$$\boldsymbol{F}-m\boldsymbol{a}_e=-mg\boldsymbol{k} \tag{2}$$

将上面三式代入方程(1)，即得物体相对于地球的运动微分方程

$$\begin{cases} m\ddot{x}=2m\omega\dot{y}\sin\lambda \\ m\ddot{y}=-2m\omega(\dot{x}\sin\lambda+\dot{z}\cos\lambda) \\ m\ddot{z}=-mg+2m\omega\dot{y}\cos\lambda \end{cases} \tag{3}$$

初始条件为

$$t=0\text{时}, x=y=0,\quad z=h, \dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0 \tag{4}$$

将(3)式积分一次，代入初始条件(4)式，得

$$\begin{cases} \dot{x}=2\omega y\sin\lambda \\ \dot{y}=-2\omega[x\sin\lambda+(z-h)\cos\lambda] \\ \dot{z}=-gt+2\omega y\cos\lambda \end{cases} \tag{5}$$

将(5)式代入(3)式，得

$$\begin{cases} \ddot{x}=-4\omega^2\sin\lambda[x\sin\lambda+(z-h)\cos\lambda] \\ \ddot{y}=2gt\omega\cos\lambda-4\omega^2 y \\ \ddot{z}=-g-4\omega^2\cos\lambda[x\sin\lambda+(z-h)\cos\lambda] \end{cases} \tag{6}$$

因为含 ω^2 的项极小，可将其略去，(6)式就简化为：

$$\begin{cases} \ddot{x}=0 \\ \ddot{y}=2gt\omega\cos\lambda \\ \ddot{z}=-g \end{cases} \tag{7}$$

再积分两次，并利用初始条件(4)式，解得

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{3}gt^3\omega\cos\lambda \\ z=h-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{8}$$

消去 t，求得轨道方程为

$$y^2=-\frac{8}{9}\frac{\omega^2\cos^2\lambda}{g}(z-h)^3 \tag{9}$$

这是位于东西竖直面内的半立方抛物线。

由此可得，若质点从高度为h处自由下落，则当它抵达地面时，其偏离的数值为

$$y=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\omega\cos\lambda,\ (z=0) \tag{10}$$

这个数值很小，实际上很难观测到。例如在上海，$\lambda=31.2°$，如 $h=200\ \mathrm{m}$，则偏东值 $y=0.0385\ \mathrm{m}=3.85\ \mathrm{cm}$。

§5.3 微 振 动

振动是工程技术和日常生活中常见的现象，振动分析在各种机械、结构的设计中日益重要

用拉氏方程导出微振动的微分方程特别方便。所谓微振动是指质点系在其稳定平衡位形附近的微幅振动。这里主要讨论保守系统（完整、定常约束，主动力全部有势，势能不显含时间）的微振动。

1. 平衡位形的稳定性

设 n 自由度保守系统，广义坐标为 $q_1,q_2,\cdots,q_n$，其势能为$U(q_1,q_2,\cdots,q_n)$，由第四章的讨论知道，平衡位形由广义力全为零给出，即

$$\frac{\partial U}{\partial q_i}=0,(i=1,2,\cdots,n) \tag{5.35}$$

所以势能在平衡位形处达到极值。

不妨设$(0,0,\cdots,0)$是系统的一个平衡位形，则稳定的定义如下：

对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，若在初始 $t=0$ 时有

$$|q_i(0)|<\delta;|q_i(0)|<\delta,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

且对一切 $t>0$，成立

$$|q_i(t)|<\varepsilon;|\dot{q}_i(t)|<\varepsilon,\ (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.36}$$

则称$(0,\cdots,0)$是**稳定的平衡位形**。

下面介绍一个平衡位形稳定性的判据。

狄利克雷(Dirichlet)定理　对保守系统，如果某一平衡位形的势能具有严格极小值，则此平衡位形是稳定的。定理的证明可见文献[8]。

对于一个自由度的系统，情况就比较简单。设势能为 $U(q)$，$q=0$ 是平衡位形，则如果 $U''(0)>0$，那么，平衡位形是稳定的；如果 $U''(0)<0$，平衡位形就是不稳定的。

在讨论微振动时，首先假定其平衡位形处的势能是极小值，因而平衡位形是稳定的。

2. 一个自由度的系统

设 q 是广义坐标，动能为 $T=\frac{1}{2}M(q)\dot{q}^2$，势能为 $U(q)$，不妨假设 $q=0$ 是稳定平衡位置，即

$$\frac{\partial U}{\partial q}=U'(0)=0,\ U''(0)=k>0 \tag{5.37}$$

现考虑平衡位置附近的微振动，因此可认为 q 和 $\dot{q}$ 都是一阶小量。将 $M(q)$ 在 $q=0$ 附近展开，得

$$M(q)=M(0)+M'(0)q+\cdots$$

将此式代入动能表达式，略去三阶以上的小量，并令 $M(0)=m$，则有

$$T=\frac{1}{2}m\dot{q}^2 \tag{5.38}$$

同样，在势能的展开式

$$U(q)=U(0)+U'(0)q+\frac{1}{2}U''(0)q^2+\cdots$$

中也略去三阶以上的小量，又取平衡位置的势能为零，即 $U(0)=0$，再注意到(5.37)式，即得势能为

$$U=\frac{1}{2}kq^2 \tag{5.39}$$

将(5.38)和(5.39)式代入拉氏方程，就得到微振动方程为

$$m\ddot{q}+kq=0 \tag{5.40}$$

这是二阶线性常微分方程。由此可见，把 T 和 U 保留到二阶小量，等价于振动微分方程的线性化。在此线性化模型中，m 称为广义质量（或等价质量），k 称为广义倔强系数（或等价倔强系数）。

令 $\omega^2=\frac{k}{m}$，上式又可写成

$$\ddot{q}+\omega^2q=0 \tag{5.41}$$

设初条件为：$t=0, q(0)=q_0$，$\dot{q}(0)=v_0$，则(5.41)式的解为

$$q = q_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t = A\sin(\omega t + \alpha) \tag{5.42}$$

其中$A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$称为振幅；$\alpha = \mathrm{arc\,tg}\frac{q_0\omega}{v_0}$称为初相，且

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{U''(0)}{M(0)}} \tag{5.43}$$

是系统的固有频率，其单位是rad/s，在工程上常用以Hz(赫兹)为单位的工程频率$f\left(=\frac{\omega}{2\pi}\right)$，它代表每秒钟振动的次数。显然，(5.42)式的振动周期$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$，其单位是s。

例 5.12 图5-12 a 所示为地震仪中的摆振系统，摆杆长为 l。倔强系数为 k 的弹簧安置在距铰链 O 为 a 处的位置，小球和摆杆关于 O 轴的转动惯量为 J_O，试求系统的微振动方程以及固有效率 ω。

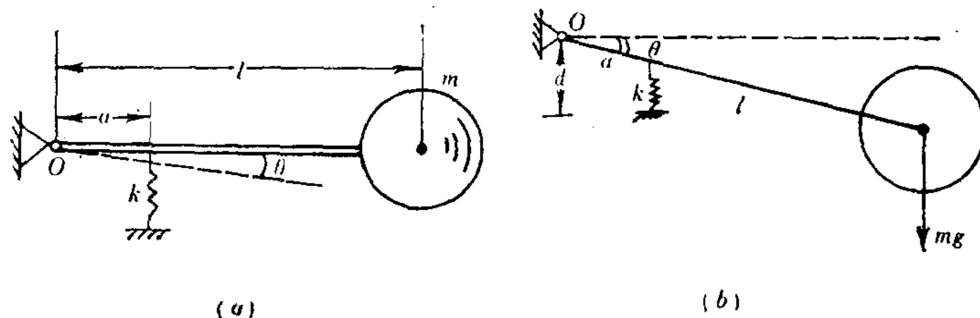


图 5-12

【解】 取摆为研究对象，它作定轴转动，具有完整、定常和理想约束。

系统的自由度$n=1$，取广义坐标$q_1=\theta$(摆杆与水平线夹角)。

不妨假设系统平衡时摆杆为水平位置，即$\theta=0$。如果把这时的弹簧长度取为自然长度，则摆锤的重力势能可以不计，即系统的势能为

$$U(\theta)=\frac{1}{2}k(a\theta)^2 \tag{1}$$

其中 $a\theta$ 是弹簧从平衡位置量起的变形量，已略去二阶以上小量，见图 b。由于

$$U''(0)=ka^2>0$$

所以 $\theta=0$ 是稳定的平衡位置。因摆系作定轴转动，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}J_O\dot{\theta}^2 \tag{2}$$

将(1)、(2)两式代入有势系统的拉氏方程，即得

$$J_O\ddot{\theta}+ka^2\theta=0$$

或

$$\ddot{\theta}+\frac{ka^2}{J_O}\theta=0 \tag{3}$$

这就是微振动微分方程，其固有频率是

$$\omega=\sqrt{\frac{ka^2}{J_O}}$$

例 5.13 求下列三个系统的固有频率，见图 5-13 $a\sim c$。

(1) 质量-弹簧系统；(2)弹簧串联系统；(3)弹簧并联系统

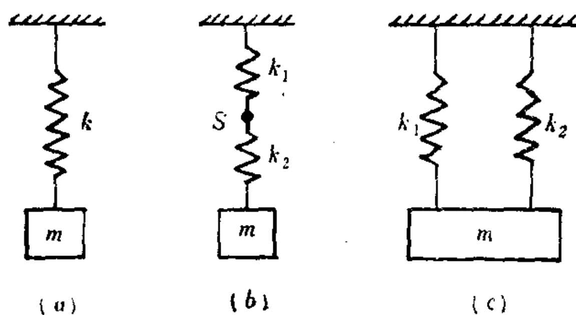


图 5-13

【解】 (1) 对质量-弹簧系统用静挠度法。

设系统平衡时，弹簧的静伸长或静挠度为 δ_{st}，即

$$k\delta_{st}=mg \quad 或 \quad \delta_{st}=\frac{mg}{k}$$

则系统的固有频率为

$$\omega^2=\frac{k}{m}=\frac{1}{m}\cdot\frac{mg}{\delta_{st}}=\frac{g}{\delta_{st}}$$

即

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$$

由此可得

$$k=\frac{mg}{\delta_{st}} \tag{1}$$

k 称为等效倔强系数。

(2) 对串联弹簧系统也用静挠度法。

设系统平衡时，弹簧 k_1 的静挠度为 δ_1，弹簧 k_2 的静挠度为 δ_2，两个弹簧的总伸长为 δ_{st}，则

$$\delta_{st}=\delta_1+\delta_2=\frac{mg}{k_1}+\frac{mg}{k_2}=mg\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)$$

设串联系统的等效弹簧的倔强系数为 k_e，则

$$k_e=mg/\delta_{st}$$

因此

$$\frac{1}{k_e}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2} \tag{2}$$

系统的固有频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{k_e}{m}}=\sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}}$$

当然也可由势能直接求出 k_e，这时要先求出图 b 中两个弹簧连接点 S 处的位移 x_S。设物块从平衡位置向下的位移为 x，由 S 点的力平衡方程得

$$k_1x_S=k_2(x-x_S)$$

所以

$$x_S=\frac{k_2}{k_1+k_2}x \tag{3}$$

现在系统的势能为

$$U=\frac{1}{2}k_1x_S^2+\frac{1}{2}k_2(x-x_S)^2=\frac{1}{2}\ \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x^2$$

因此，$\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}}$就是等效倔强系数 k_e。

（3）对并联弹簧系统，取系统平衡时物块的位置为坐标原点，此时两个弹簧的长度相等。这时弹簧的长度取为自然长度，可不考虑重力。那么，系统的势能为

$$U=\frac{1}{2}k_1x^2+\frac{1}{2}k_2x^2=\frac{1}{2}(k_1+k_2)x^2$$

所以

$$k_e=k_1+k_2 \tag{4}$$

则

$$\omega=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} \tag{5}$$

3. 两自由度系统

为了求多自由度保守系统的微振动微分方程，同样可将系统的动能和势能的表达式在稳定平衡位形附近展开并保留到二阶小量，然后代入拉氏方程即可求得。

单自由度振动的解为(5.42)式，它只有一个振动频率 ω，对于多自由度系统，有多个固有频率。当系统中每个广义坐标以同一固有频率振动并有共同相位时，各个广义坐标的振幅之间有一确定的比例，这种振动形式就称为**振型或主振型**。多自由度系统有好几个振型。

下面举例说明两自由度系统的解法。

例 5.14 图 5-14 所示为一质量-弹簧系统，求系统的微分方程、固有频率和主振型以及系统的一般解。

【解】 研究对象是质量-弹簧系统，两物块均作直线运动，系统具有完整、定常、理想约束。显然，本题是保守系统。系统的自由度 $n=2$，如图 a，取广义坐标为 $q_1=x_1, q_2=x_2$（平衡时 $x_1=x_2=0$）。

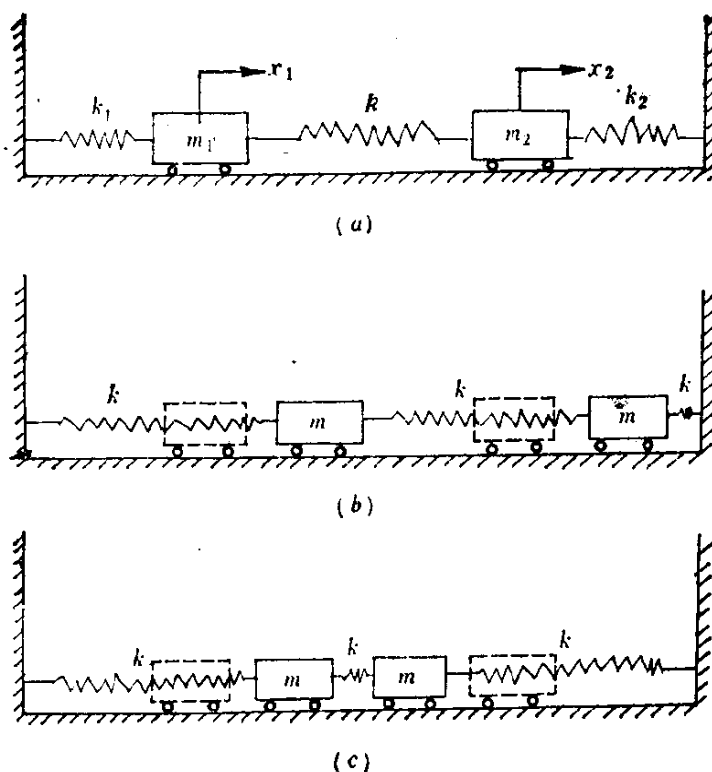


图 5-14

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

系统的势能为

$$U=\frac{1}{2}\,k_1x_1^2+\frac{1}{2}k\,(x_1-x_2)^2+\frac{1}{2}k_2x_2^2$$

将 T、U 代入拉氏方程即得微分方程组为

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1=-k_1x_1-k(x_1-x_2) \\ m_2\ddot{x}_2=k(x_1-x_2)-k_2x_2 \end{cases} \tag{1}$$

将上式改写成如下矩阵形式：

$$[M]\{\ddot{X}\}+[K]\{X\}=0 \tag{2}$$

其中

$$\{X\}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\ [M]=\begin{bmatrix}m_1 & 0\\0 & m_2\end{bmatrix}$$

$$[K]=\begin{bmatrix} k_1+k & -k \\ -k & k+k_2 \end{bmatrix}$$

所谓主振型就是寻找一组如下形式的特解

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega t+\varphi) \\ x_2 = A_2 \sin(\omega t+\varphi) \end{cases} \tag{3}$$

或

$$\{X\}=\{A\}\sin(\omega t+\varphi) \tag{4}$$

其中

$$\{A\}=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

特解(3)表示 x_1 和 x_2 以同一频率 ω 作简谐振动，相位可以相同或者相差 π，振幅 A_1、A_2 可以任意但不能同时为零。

将(3)式代入(1)式或(2)式，得到齐次方程组

$$\begin{cases} A_1(k_1+k-m_1\omega^2)+A_2(-k)=0 \\ A_1(-k)+A_2(k_2+k-m_2\omega^2)=0 \end{cases} \tag{5}$$

因为 A_1、A_2 有非零解，所以要求系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} k+k_1-m_1\omega^2 & -k \\ -k & k+k_2-m_2\omega^2 \end{vmatrix}=0 \tag{6}$$

(5)式称为**特征方程**或**频率方程**，因为由它可以解出固有圆频率 ω。将求得的 ω 值代入(5)式即可得

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{k}{k_1+k-m_1\omega^2}$$

或

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{k_2+k-m_2\omega^2}{k} \tag{7}$$

(7)式确定了两质点运动时其振幅的比值，就是所谓的“主振型”。

为简单起见，设 $m_1=m_2=m, k_1=k_2=k$，则由(6)式和(7)式可得

$$\text{第一频率}\ \omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}\text{，第一振型}\ u_1=(1,1)^T$$

第二频率 $\omega_2=\sqrt{\dfrac{3k}{m}}$，第二振型 $\boldsymbol{u}_2=(1,-1)^T$

振型图如图 b 和图 c 所示。求得的振动解为

第一主振动

$$\begin{cases} x_1^{(1)}=c^{(1)}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t+\alpha^{(1)}\right) \\ x_2^{(1)}=c^{(1)}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t+\alpha^{(1)}\right) \end{cases} \tag{7}$$

第二主振动

$$\begin{cases} x_1^{(2)}=c^{(2)}\sin\left(\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t+\alpha^{(2)}\right) \\ x_2^{(2)}=-c^{(2)}\sin\left(\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t+\alpha^{(2)}\right) \end{cases} \tag{8}$$

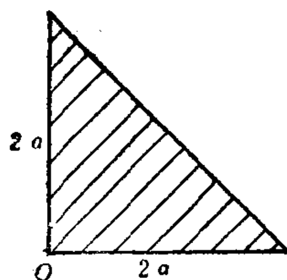
一般振动

$$\begin{cases} x_1=c^{(1)}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t+\alpha^{(1)}\right)+c^{(2)}\sin\left(\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t+\alpha^{(2)}\right) \\ x_2=c^{(1)}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t+\alpha^{(1)}\right)-c^{(2)}\sin\left(\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t+\alpha^{(2)}\right) \end{cases} \tag{9}$$

其中常数 $c^{(1)}$、$c^{(2)}$ 及 $\alpha^{(1)}$、$\alpha^{(2)}$ 由初始条件决定。

习　　题

5-1　如图，试求下列各均质物体（质量均为 M）关于 O 点的固连主轴系 $O123$ 以及主惯量 A、B、C。





(a) 等腰直角三角形薄板　　(b) 半球壳，O为球心

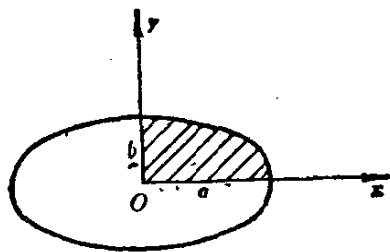
题 5-1 图

5-2　在通过某一物体的中心惯量主轴上取一点 O，试证通过 O 点且与中心惯量主轴平行的直线都是 O 点的惯量主轴。

5-3　如图所示，均质的四分之一椭圆形薄板（质量为 M），其椭圆方程为

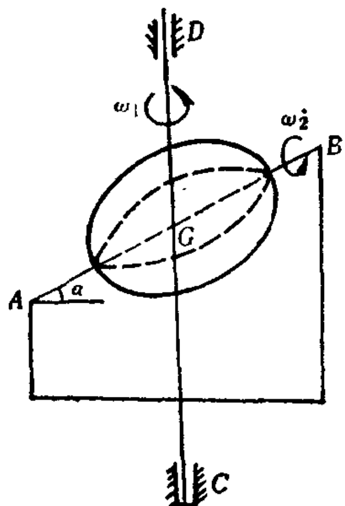
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

试求其在 O 点的惯量矩阵 $[J_{xyz}(O)]$。

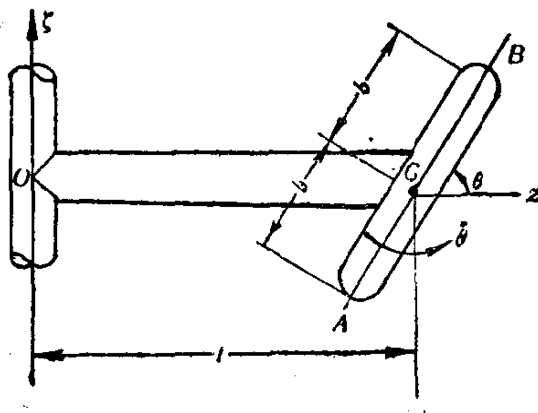


题 5-3图

5-4　均质的旋转椭球（质量为 M）绕其旋转对称轴 AB 轴以角度速 ω_1 转动，而此轴本身又以角速度 ω_2 绕过椭球中心 G 的竖直轴转动，AB 轴与水平线的夹角为 α（如图），设椭球关于 G 的主惯量为 A、A、C，试求椭球的动能 T 以及对质心 G 的动量矩 $\boldsymbol{H}_G$。设 $GNSZ$ 是莱沙尔主轴系。



题 5-4图

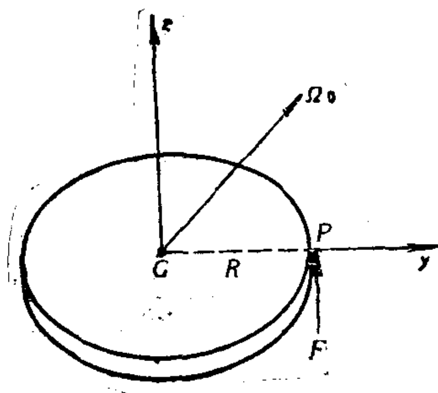


题 5-5 图

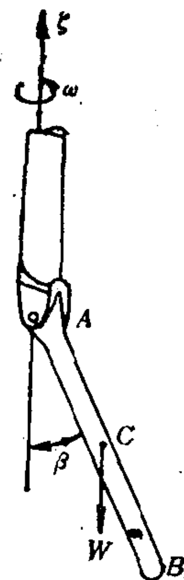
5-5　如图，均质细长杆 AB（质量为 M，长为 $2b$）可绕轻杆 OG 的端点 G 在 ζOz 面内转动，而 OG 杆又绕过 O 点的竖直轴 $O\zeta$ 旋转，试求系统的动能 T 及对 O 点的动量矩 $\boldsymbol{H}_0$。

5-6　如图所示，质量为 m、半径为 R 的均质圆盘在常力 $\boldsymbol{F}$（大小为 $mR\Omega_0^2/8$，方向恒与盘面垂直，作用点恒为盘边的 P 点）作用下绕其质心 G 作定点转动，其初角速为 $\boldsymbol{\Omega}_0$，方向与盘面法线成 $\frac{\pi}{4}$ 角。初始

时，P 点位于圆盘对称轴与 Ω_0 所在的平面上。试列出欧拉动力学方程，并求圆盘的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$。



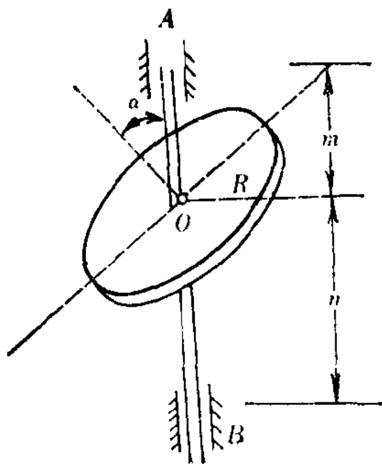
题 5-6 图



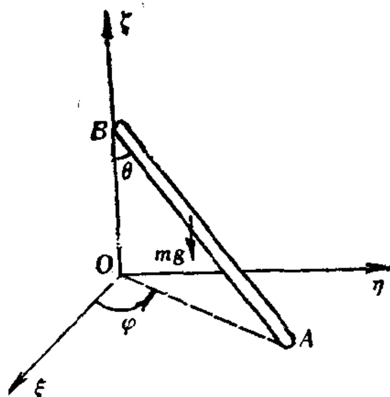
题 5-7 图

5-7　如图所示，均质杆 AB（重为 W，长为 l）以等角速 ω 绕固定铅直轴 $A\zeta$ 转动（$\omega^2>3g/2l$），试求 AB 杆与竖直线的夹角 β 以及铰链 A 处约束反力的大小 R。

5-8　均质圆盘（半径为 R，质量为 M）以等角速 ω 绕过盘心 O 的固定铅垂轴转动，盘面法线与转轴间的夹角为 α，两轴承 A、B 与盘心的距离为 m 和 n（如图），求轴承上的动反力。



题 5-8 图

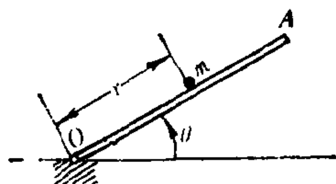


题 5-9 图

5-9　一根长为 l、质量为 m 的均质棒 AB，其 A 端在水平面 $\xi O\eta$ 上滑动，而 B 端沿铅直轴 $O\zeta$ 滑动，如图示。不计摩擦，求 AB 杆的运动微分方程及初积分。

5-10　飞机发动机的螺旋桨及其转动部分对飞机纵轴的转动惯量 $J=0.8\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^2}$（工程单位制），转速 $n=1200\ \mathrm{r/min}$，当飞机以速度 $v=40\ \mathrm{m/s}$ 在半径 $R=25\ \mathrm{m}$ 的弯道上急转弯时，求转动部分作用在飞机上的陀螺力矩。

5-11　如图，直杆 OA 在光滑水平面上以等角速度 ω 绕过其固定端 O 的铅垂轴转动，同时它推动一个在此平面上的、质量为 m 的小球（作为质点），小球可相对于杆运动，球与杆间的摩擦系数为 μ，求小球沿 OA 杆的相对运动规律。设初始时，小球与 O 点的距离为 a，球的相对速度为零。



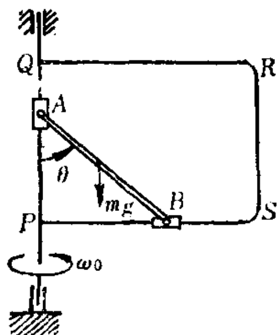
题5-11 图

5-12　一光滑管子，其轴线为一平面曲线，管子安置在水平面上以等角速 ω 绕一固定竖直轴 O 转动。管内有一小球 M，它与 O 点的初始距离为 r_0，它相对于管子的初速度为零。证明，小球的相对速度为

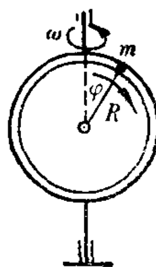
$$v_r=\omega\sqrt{r^2-r_0^2}$$

其中 r 为小球与 O 点的距离。

5-13　如图所示，质量为 M、长为 $2l$ 的均质杆 AB，其两端分别沿框架的铅垂杆 PQ 和水平杆 PS 无摩擦地滑动，而框架则以等角速度 ω_0 绕其固定轴 PQ 转动，求 AB 杆相对于框架的运动方程和平衡位置。



题 5-13 图



题 5-14 图

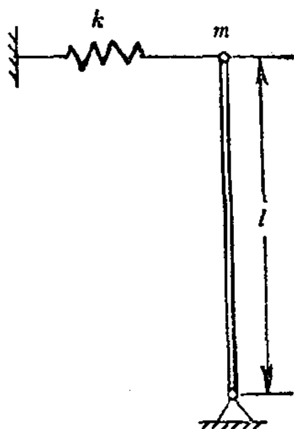
5-14　如图所示，半径为 R 的圆环以常角速 ω 绕过其环心的固定竖直轴转动。质量为 m 的小球沿此光滑圆环运动。试求小球的相对运动微分方程，以及相对平衡位置并讨论其稳定性。

5-15　一火车在水平直轨上以常速 v 行驶，考虑地球的自转的影响，求证：车厢内的单摆悬线与竖直线的夹角为 $2\omega v\sin\lambda/g$，其中 ω 为地球自转角速度，λ 为当地纬度。

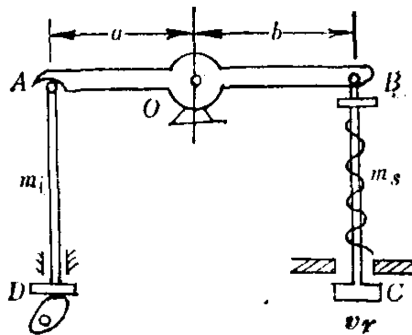
5-16　一倒置摆用一刚度为 k 的线性弹簧支撑，如图示。试求：

（1）系统的平衡位置及其稳定性。

（2）在平衡位置附近，系统作微振动的微分方程和固有频率。



题 5-16 图



题 5-17 图

5-17　上图为一内燃机排气阀系统的简图。已知摇杆 AB 对支点 O 的转动惯量为 I_O，汽阀 BC 的质量为 m_v，阀簧质量为 m_s，计算时可近似地将 $m_s/3$ 集中于 B 点，挺杆 AD 的质量为 m_l。求将此系统简化到阀门 C 点时的等效质量。

提示：取 C 点位移 X 为广义坐标，将系统的功能写成形式 $T=\frac{1}{2}m_b\dot{q}_o^2$，则 m_b 称为等效质量。

第六章 哈密顿力学

哈密顿力学是相空间(由 n 个广义坐标和 n 个广义动量组成的空间,因此是偶数维的空间)上的几何学,一个哈密顿力学系统是由一个相空间及其不变量以及一个哈密顿函数 H 所决定的。哈密顿力学对于一些复杂的力学问题(如三维椭球上的测地线)、摄动理论(天体力学)、复杂力学系统(如统计力学)的运动特征以及其它物理领域(如光学、量子力学)的研究都具有很大的价值。

在这一章里我们介绍哈密顿正则方程和哈密顿原理这两个最基本的内容。

§6.1 哈密顿正则方程

拉格朗日方程是广义坐标的二阶微分方程组。哈密顿正则方程是它的一种等价形式,是广义坐标和广义动量的一阶微分方程组,它适用于具有完整、理想约束(定常或非定常)且主动力有势的系统。

1. 哈密顿函数和正则方程

设系统的拉格朗日函数是

$$L(q_1,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n,t)$$

广义动量是

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=p_i(q_1,\cdots,q_n,\dot{q}_1\cdots,\dot{q}_n,t),(i=1,2,\cdots,n) \tag{6.1}$$

则拉格朗日方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}\,p_i}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\partial L}{\partial q_i},(i=1,\cdots,n) \tag{6.2}$$

从这组方程中可以反解出广义速度,且广义速度是广义坐标和广义动量的函数,即

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, t) \tag{6.3}$$

根据第四章，系统广义能量的表达式为

$$h = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1 \cdots, \dot{q}_n, t)$$

将(6.3)式代入上式，得到用广义坐标和广义动量所表示的广义能量式，通常记作 H，即

$$H(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i(q_1, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n, t)$$

$$- L(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, t), \cdots,$$

$$\dot{q}_n(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, t), t) \tag{6.4}$$

根据(4.38)式，当 L 是广义速度的二次式时，上式可写成

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = T_2 - T_0 + U \tag{6.5}$$

H 称为**哈密顿函数**，它的物理意义是：广义能量在定常约束下就是总机械能，但注意在数学形式上它必须是用哈密顿变量 $\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{p}$ 表示的函数。

例 6.1 对水平面上不受外力的自由质点，写出它的哈密顿函数。

【解】 取质点为对象，自由度 $n=2$，取其直角坐标 (x, y) 为广义坐标，则

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$U = 0$$

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

而广义动量为

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \tag{1}$$

对于保守系统

$$H = T + U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{2}$$

但这还不是哈密顿函数，因为其中含有广义速度，而不是广义动量，因此，将(1)式代入(2)式后得到质点的哈密顿函数为

$$H=\frac{P_x^2}{2m}+\frac{P_y^2}{2m} \tag{3}$$

我们可以从哈密顿函数得出正则方程，这时，先将(6.4)式对 q_j 求偏导数，得

$$\frac{\partial H}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(p_i-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}$$

在上列运算中使用了复合函数的求导法则，并且把 p_i 看成是与 q_i 无关的独立变量。

将(6.1)式和(6.2)式代入上式，就得到

$$\frac{\partial H}{\partial q_j}=-\dot{p}_j \tag{6.6}$$

同理，再将 H 对 p_j 求偏导数，并考虑到(6.1)式就可得到

$$\frac{\partial H}{\partial p_j}=\dot{q}_j+\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j}$$

$$=\dot{q}_j+\sum_{i=1}^{n}\left(p_i-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j}=\dot{q}_j \tag{6.7}$$

将(6.6)式和(6.7)式联立起来就得到了一组 $2n$ 个变量 q_j 和 p_j 的一阶微分方程组，即哈密顿正则方程：

$$\begin{cases}\dot{p}_j=-\dfrac{\partial H}{\partial q_j}, \\ \dot{q}_j=\dfrac{\partial H}{\partial p_j},\end{cases}(j=1,2,\cdots,n) \tag{6.8}$$

从整个推导过程中我们清楚地看到，方程(6.8)与方程(6.1)和(6.2)是等价的，而后者就是拉格朗日方程。哈密顿正则方程的特点是每个方程都是一阶的，且方程形式简单而对称。

哈密顿正则方程(6.8)的几何意义是，在某一瞬间，把系统的状态用 $2n$ 维空间中一个点来表示，这个空间的坐标是由 n 个广义坐标及 n 个广义动量所组成的，叫做**相空间**，这个代表点叫**相点**。例如，当 $n=1$，即单自由度时，相空间就是一个两维的相平面(图 6-1)。质点系的运动过程在相空间中对应一条相轨迹，每时每刻反映出系统的位形与广义动量，而哈密顿方程(6.8)就是给出了相点的运动速度。在振动理论和统计力学中，相空间是很有用的表示方法。

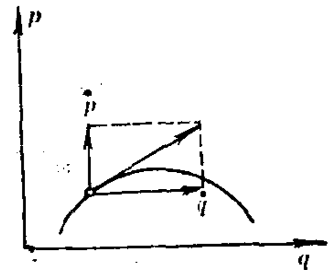


图 6-1

现在我们试图把正则方程(6.8)写成矩阵形式。为此，引进 $2n$ 行的列阵 $\boldsymbol{Z}=(p_1,\cdots,p_n \vdots q_1,\cdots,q_n)^T=(\boldsymbol{p} \vdots \boldsymbol{q})^T$，再引进列阵

$$\boldsymbol{H}_z=\left(\frac{\partial H}{\partial p_1},\cdots,\frac{\partial H}{\partial p_n} \vdots \frac{\partial H}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial H}{\partial q_n}\right)^T=\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \vdots \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T$$

以及 n 阶单位矩阵 I_n，则正则方程就可写成下列形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\\ \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\end{pmatrix} \tag{6.9}$$

通常把下列 $2n\times 2n$ 阶矩阵

$$[J]=\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix} \tag{6.10}$$

称为**辛矩阵**（Symplectic Matrix），它具有反对称性、双线性等许多性质，如 $[J]^T=[J]^{-1}=-[J]$。现在可将(6.8)式记作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{Z}=[J]^{-1}\boldsymbol{H}_z \tag{6.11}$$

2. 正则方程的首次积分

如果 H 不含某一个广义坐标 q_j，即

$$\frac{\partial H}{\partial q_j}=0$$

由(6.8)式第一个方程可得到广义动量守恒：

$$p_j = 常量$$

再计算哈密顿函数 $H\ (q_1,\cdots,q_n,p_1,\ \cdots,p_n,\ t)$ 对 t 的全导数，得

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)$$

在运动过程中，正则方程(6.8)成立，将它代入上式，则得

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial H}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\right]=\frac{\partial H}{\partial t}$$

即广义能量对时间的变化率等于哈密顿函数 H 对时间的偏导数。如果 H 中不显含 t，那么

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0,H=常数$$

即广义能量守恒。所以正则方程的两类首次积分可表述为：

(1) 如 H 中不显含某一个 q_j，则相应的广义动量守恒。

(2) 如 H 中不显含时间 t，则广义能量守恒。

例 6.2 用哈密顿正则方程解单自由度线性振动问题。

【解】 设广义坐标为 q，则拉格朗日函数是

$$L=\frac{m}{2}\dot{q}^2-\frac{k}{2}q^2$$

其中 m为质量，k 为弹簧倔强系数。

广义动量是

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=m\dot{q}$$

由此得出哈密顿函数为

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{k}{2}q^2$$

哈密顿正则方程为

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{p}{m},\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-kq$$

(如消去 p,则得熟知的方程 $mq \ + kq = 0$)

因 H 中不显含 t,所以有广义能量积分

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 = E(\text{常量})$$

可见在相平面(q-p 平面)上,全部相轨迹是一族椭圆,其中每一个的大小由总能量常数 E 确定。当然,也可先从正则方程消去时间 t,得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} = -\frac{mkq}{p}$$

然后再积分得出相轨迹,这与能量积分完全等价。

例 6.3 平面开普勒问题。写出哈密顿正则方程及其首次积分。

【解】 取极坐标 ρ、φ 为广义坐标,则势能为

$$U = -\frac{k}{\rho}$$

拉格朗日函数为

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + \frac{k}{\rho}$$

算出广义动量是

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}$$

解得

$$\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}$$

于是,哈密顿函数为

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} - \frac{k}{\rho}$$

由此得到正则方程组为

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \dfrac{p_\rho}{m}, & \dot{\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{m\rho^2} \\ \dot{p}_\rho = -\dfrac{k}{\rho^2} + \dfrac{p_\varphi^2}{m\rho^3}, & \dot{p}_\varphi = 0 \end{cases}$$

因为 H 中不显含 φ，所以有广义动量积分 $p_\varphi = C$（常量），这就是动量矩守恒，又因 H 中也不显含 t，所以有广义能量积分 $H = E$（常量），即

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{C^2}{2m\rho^2} - \frac{k}{\rho} = E$$

这是机械能守恒。

在简单的例子中，用正则方程来讨论运动并不见得有什么优越性，反而觉得麻烦了。但是对于自由度 n 较大的系统，由于方程写成 $2n$ 个一阶方程，其形式比较整齐，就有利于研究了。在天体力学中至今还在应用的摄动法，就是将哈密顿函数按照小参数展开后再应用正则方程的一种方法。

哈密顿正则方程是在经典力学范围内推导出来的，但是用广义坐标及广义动量表出的运动方程已被应用到微观和高速问题中去了，经典力学的方法在非经典力学中得到了推广和应用。

§6.2 哈密顿变分原理

1. 哈密顿原理

哈密顿原理是经典力学中又一个重要原理。这个原理被看作力学（乃至整个物理学）中的最高原理。

哈密顿原理在数学方面涉及到某个泛函的极值（驻定值）问题，或称变分问题。有关变分法的简单介绍，可见附录 Ⅳ 。

为了叙述哈密顿原理，先引进一个积分：

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n, t)\mathrm{d}t$$

其中 L 就是拉格朗日函数，这个积分称为**哈密顿作用量**，它是 $q_1, \cdots, q_n$ 的泛函。

哈密顿原理：在相同的时间、相同的始、末位置和相同的约束条件下，完整、保守系统在所有可能的运动中，其真实运动使哈密顿作用量取极值，即真实运动是以下变分问题的解

$$\delta S = \delta\int_{t_0}^{t_1} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\mathrm{d}t = 0 \tag{6.15}$$

其中 $\boldsymbol{q}$ 和 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 是$(q_1,\cdots,q_n)$和$(\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n)$的缩写。这样，力学上求真实运动的问题就化成了数学上的变分问题。哈密顿原理给出了一条准则，以便在众多的可能运动(约束许可的运动)中，将真实运动区分开来。

哈密顿原理把动力学问题归结为标量积分的研究，它特别适用于近似解法，在连续介质力学、结构力学等领域中得到广泛的应用。

2. 哈密顿原理的推广

哈密顿原理可以推广到非保守系统和非完整系统中去。对于非保守系统，原理的数学表达式为

$$\delta S+\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{Q}_i\delta q_i\right)\mathrm{d}t=0 \tag{6.16}$$

其中 S 仍是哈密顿作用量，$\widetilde{Q}_i$ 是非有势力所对应的广义力，在左端积分式中，括号内是非有势力所作的虚功。

虚位移原理、达朗伯原理及哈密顿原理是等价的。如果把哈密顿原理作为基本原理，则很易直接导出拉氏方程。因为，根据哈密顿原理有

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L(q_1,\cdots,q_n,\ \dot{q}_1,\cdots,\ \dot{q}_n,t)\mathrm{d}t=0$$

作为变分问题，应满足拉朗日方程(贝附录 Ⅳ)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\ (i=1,2,\cdots,n)$$

这就是完整、有势系统的拉氏方程。反过来也可以由拉氏方程导出哈密顿原理。

所以，哈密顿原理与拉氏方程是等价的，而拉氏方程可由动力学基本方程导出，在第四章已经说明过虚位移原理与牛顿定律的一致性，达朗伯原理与牛顿定律是等价的。因此，作为牛顿力学、拉格朗日力学和哈密顿力学出发点的三个基本原理是互相等价的。

习　　题

6-1 设自由质点的质量为 m，在势能为 $U(\boldsymbol{r})$的力场中运动，试

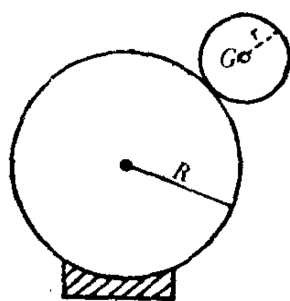
求质点在下列坐标系中的哈密顿函数的表示式。

（1）球面坐标；

（2）坐标系以等角速 ω 绕固定轴 Oz 旋转。

6-2 一具有可变长度 $l(t)$ 的数学摆，$l(t)$ 为已知函数，试求此摆的哈密顿函数及正则方程。

6-3 半径为 r 的均匀圆球在重力作用下自半径为 R 的固定圆球的顶端由静止无滑动地滚下，试用正则方程求球心 G 的加速度。



题 6-3图

第二部分 弹 性 体

第七章 弹性力学的基本概念

在本书的第一部分中，我们研究的对象是质点，刚体及其组合系统，研究它们在外力作用下的平衡及运动规律。在研究过程中，我们忽略了物体的大小和其形状的改变。然而，在许多实际问题中，物体存在着不同程度的形变且不容许忽略，这种物体称为**变形体**。现在我们就来讨论变形体力学。变形体有流体、固体，限于篇幅本书将不讨论流体。至于变形固体，也可分为几种不同的类型，其中最常见的一种称为**弹性体**，其特点是具有保持一定大小和形状的趋势，在外力的作用下虽然会发生形变，但外力撤消后又能恢复原状。研究弹性体的力学称为**弹性力学**，其内容主要是讨论物体在受外力作用下所产生的应力、应变和位移。弹性力学对于校核各种工程构件的强度、刚度和稳定性有重要的意义，本章将叙述与它有关的一些基本概念。

§7.1 弹性力学的基本假设

前已叙述，弹性力学的研究对象是变形固体。由于变形固体的实际结构很复杂，在研究过程中必须简化并用理想化的模型来代替。弹性力学问题中一般对变形固体作如下基本假设：

1. 连续性假设

假设物体是连续的，也就是说整个物体的体积，都被组成该物体的介质所充满，没有任何空隙。根据这个假设就可以认为物体内部的各种物理量，例如应力、应变、位移、密度等都是坐标的连续函数。研究连

续分布的可变形物体运动规律的学科统称为**连续介质力学**，它是力学中的一部分，而弹性力学是连续介质力学的一个分支。有了连续性假设后，就使很多基于连续函数的数学工具成了研究弹性力学的有效手段。

2．线性弹性规律

所谓线性弹性规律就是假设物体服从虎克定律，即在形变过程中，在一定应力范围内物体所受到的应力与该物体的应变成比例。当外力撤消后弹性体的应变将随着减小到零。这种性质也是实际材料变形规律的一种近似模型，它是弹性体力学区别于其他连续介质力学分支的本质特点。

以上两个假设是最基本的。在有些情况下，还要增加两个假设。

3．均匀性假设

假定物体由同一材料组成，物体各部分的力学性质完全相同。据此可以在物体中任取一部分加以分析，所得到的结果对整个物体都成立。

4．各向同性假设

假定物体在各个不同的方向都具有相同的弹性性质。这个假设对钢材料及好的混凝土等是成立的，但是木材、竹片或胶合板等都不能当作各向同性的。

凡是符合以上四个假定的物体就称为**理想弹性体**。作为基础教材，本书主要介绍理想弹性体的线性问题，也就是再加上一个**小变形假设**，即假定物体受力后，物体上各点由于变形而产生的位移远远小于物体原来的尺寸。这样在建立变形后的平衡方程时，就可以用变形前的尺寸来代替变形后的尺寸，使有关的代数方程和微分方程都能简化成线性方程，并可应用叠加原理求解。如果不引进这一假设，那就有可能出现非线性问题，它的数学求解要比线性问题复杂得多。

§7.2 位移和变形

1．位移

一个物体在空间运动或发生变形时，组成该物体的各个质点总会

产生位移。在物体所占据的空间引进直角坐标系，如图 7-1 所示。假定某质点 A 的原始位置的矢径为 $\boldsymbol{r}$，在物体运动和变形后移动到新的位置 $\boldsymbol{r}'$，则矢量

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$$

就是该质点的位移。位移 $\boldsymbol{u}$ 与点 A 的坐标有关。又因物体的每一质点都可以有位移，因而在物体所占的空间里就形成了一个位移场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)$。若已知该位移场，则就可以根据物体的原始位形描绘出在运动和变形后物体的位形。假设物体在变形前后都是连续和光滑的，就是说不发生撕裂或折皱等现象，那么可以认为位移场是连续可微的。而且，这个位移场应该包括物体的刚体运动（平动和转动）所引起的位移以及由纯变形所产生的位移。

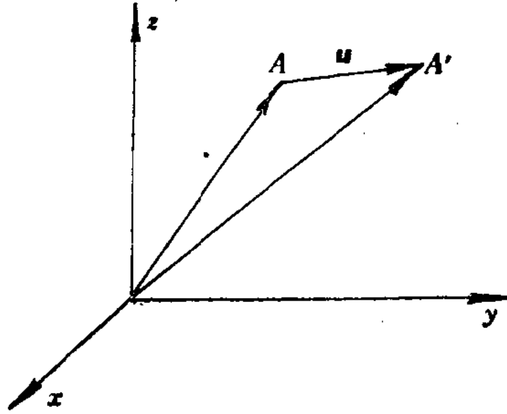


图 7-1

2．线应变及剪应变

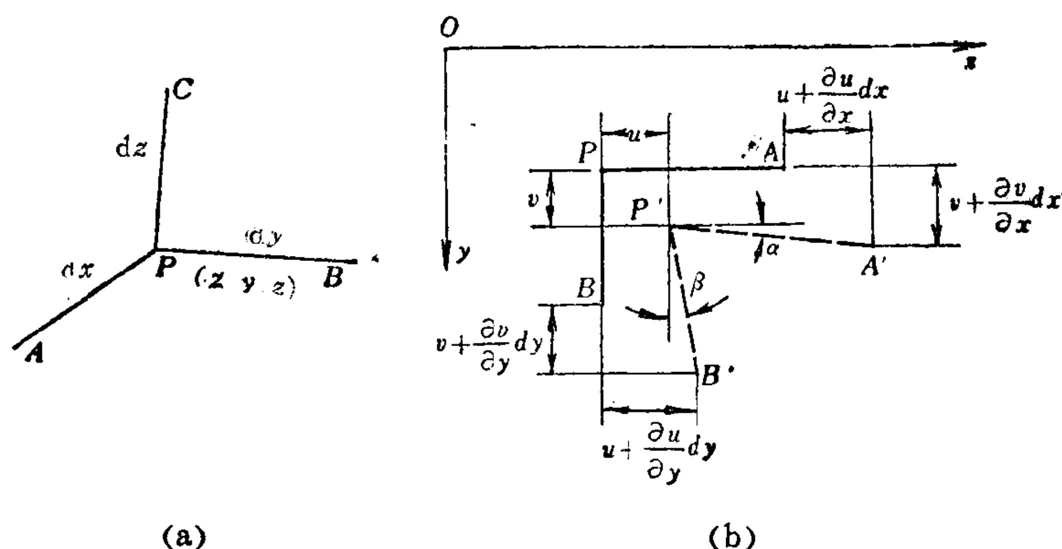
刚体运动产生的位移已在理论力学的运动学部分作了详尽的叙述，弹性体力学主要研究的是物体的纯变形。下面我们介绍用来度量物体纯变形程度的两个基本量——**线应变** ε 和**角剪应变** γ。

为了分析物体在某一点 P 的变形状态，可以在这一点沿着坐标轴 x、y、z 的正方向取三个微小的线段 PA、PB 和 PC，其长度分别为 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$，如图 7-2 a 所示。物体变形后这三个微元的长度及它们之间的夹角都会有所改变。如果变形后 P 点在 x 方向的位移分量是 $u(x,y,z)$ 则由于坐标 x 的改变，A 点在 x 方向的位移分量将是 $u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$。可见线段 PA 的单位长度伸长（缩短）量是

$$\varepsilon_x=\frac{u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x-u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{7.1}$$

ε_x 称为物体在 P 点处沿 x 轴方向的**线应变**或相对伸长(缩短)。类似地,物体在 P 点处沿 y 轴和 z 轴方向的线应变为 $\varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\varepsilon_z=\dfrac{\partial w}{\partial z}$,其中 v、w 是 P 点在 y、z 方向的位移分量。我们规定,当微元长度增加时线应变 ε 为正值,缩短时则 ε 为负值。

现在来求线段 PA 与 PB 之间夹角的变化。图 7-2 b 显示了 PA



(a) (b)

图 7-2

和 PB 变形前后的位置在 Oxy 平面上的投影。设 P 点在 y 方向的位移分量是 v,则由于坐标的变化,A 点在 y 方向的位移分量是 $v+\dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$。因此,线段 PA 的转角是

$$\alpha\approx\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{v+\dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x-v}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

同理可得线段 PB 的转角是

$$\beta=\frac{u+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y-u}{\mathrm{d}y}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

PA 与 PB 之间的夹角的改变量为

$$\gamma_{xy}=\alpha+\beta=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$$

称 γ_{xy} 为物体在 P 点处的**剪应变**。在 P 点处还有两个不同方向的剪应变，即

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z} \text{ 和 } \gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}$$

它们分别对应于 PB 和 PC 间的改变及 PC 和 PA 间夹角的改变。我们规定，当角度减小时剪应变为正，当角度增大时剪应变为负。

以后将进一步说明，线应变 ε_x、ε_y、ε_z 和剪应变 γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx} 这六个应变分量可以完全确定物体在点 P 处的变形状态。为了研究整个物体的变形，可以设想把物体分成无数个微小的单元体，每一个单元都只有上述长度和角度的基本变形。把这些变形后的单元体组合起来，就形成变形后的物体，从而反映出物体的整体变形。

§7.3 内力和应力

物体受外力作用而变形，其内部各部分之间因相对位置改变而引起的相互作用力称为**内力**。这种内力一般随外力的增大而增大，超过某一限度时材料就要被破坏。

为了求出物体在外力作用下某一截面上的内力，常常使用截面法。图 7-3 a 是一个在外力作用下处于平衡的物体。为了求出截面 mn 上的内力，可将物体沿此截面切开，任取其中一部分，例如 A，作为研究对象。物体 A 仍应是平衡的，因此 mn 面上必有内力存在，它们和作用在 A 上的外力一起构成平衡力系（见图 7-3 b）。这部分内力是 B 部分对 A 的作用力。根据连续性假设，在截取的截面上的每一点处都有内力。为了说明内力在截面内某一点处的强弱程度，需要引入应力的概念。

围绕截面内的某点 M，取一个微面积 ΔF，并以 $\Delta \boldsymbol{P}$ 表示作用在 ΔF 面上的内力的合力，则内力的平均集度，即平均应力为 $\Delta \boldsymbol{P}/\Delta F$。

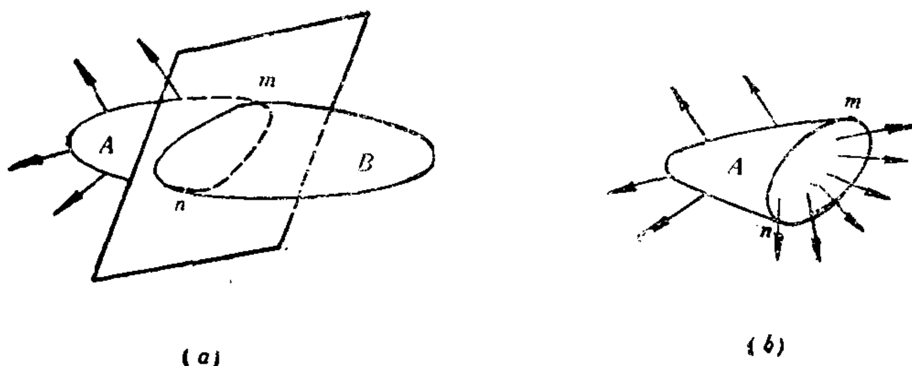


图 7-3

若令微面积 ΔF 无限减小而趋于 M 点，因内力是连续分布的，则平均应力将趋于一定的极限 $\boldsymbol{p}$，即

$$\boldsymbol{p}=\lim\frac{\Delta\boldsymbol{P}}{\Delta F}=\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}\,F} \tag{7.2}$$

我们称极限矢量 $\boldsymbol{p}$ 为物体在 mn 截面上的 M 点的**应力**。它的方向与内力 $\Delta\boldsymbol{P}$ 的方向一致。通常称为截面 mn 上 M 点的**全应力**。

全应力矢量可以分解为两个分量，一个沿作用面的法线方向，称为**正应力**或**法向应力**，用 σ 表示；另一个沿作用面的切向，称为**剪应力**或**切向应力**，用 τ 表示。正应力和剪应力与材料的变形及强度直接相关，今后经常用到。显然，一点处的全应力、正应力和剪应力之间存在下列关系式(图 7-4)

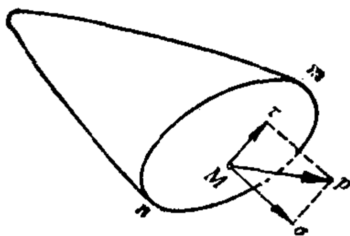


图 7-4

$$p^2=\sigma^2+\tau^2 \tag{7.3}$$

应力的量纲为[长度]$^{-1}$[质量][时间]$^{-2}$，在国际单位制中应力的单位是 $\mathrm{N/m^2}$，简称 Pa(帕)或 $\mathrm{kN/m^2}$、$\mathrm{MN/m^2}$ 等。

例 7.1 求充气球壳壁内的平均正应力。一个内径为 r、外径为 R 的充气球壳，壳内承受压强为 q 的均布气压力。试求过球心的横截面上的平均正应力。

【解】 为求某平面上的应力，可截取分离体。用一个经过球心的平面将球切成两半，把上半球作为一个分离体来研究(如图 7-5 所示)。

此半球壳受到均匀分布在内球面上的内压作用；环形横截面上有内力作用。根据平衡条件可知，环形横截面上的内力是沿截面法线方向的。设该截面上的正应力为均匀分布的，则各处的正应力相同且等于截面上内力之和除以环形横截面积。已知环形截面的面积为 $\pi(R^2-r^2)$，

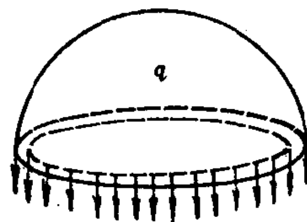


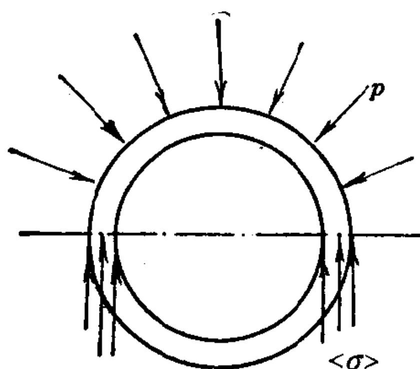
图 7-5

截面上的内力之和等于作用在半球壳上的内压力在截面法向上投影的总和。我们得到

$$\sigma=\pi r^2q/(R^2-r^2)\pi=r^2q/(R^2-r^2)$$

其中 πr^2 是内半球面在横截面上的投影面积。上面得出的公式适用于各种球壳。

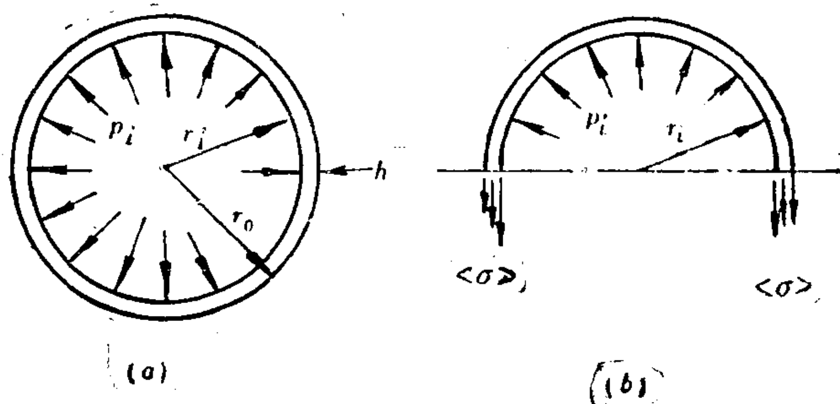
习　题



题 7-1

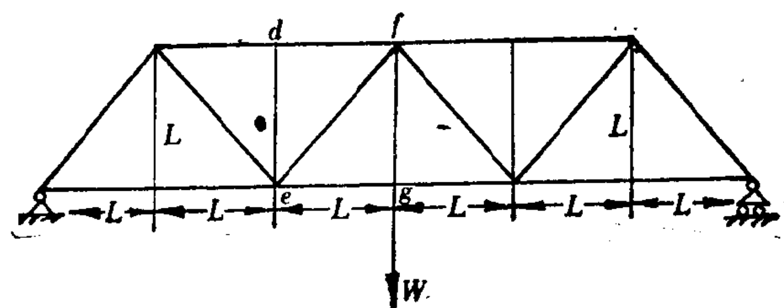
7-1　如图所示，求一个承受均匀外压强 p 的球壳在壁内的平均正应力。设球壳的内、外半径分别为 r 和 R。

7-2　如图所示，壁厚为 h 的圆柱形容器，横截面的内半径为 r_i。当该容器承受均匀内、压 p_i 作用时，试求箍向的正应力大小



题 7-2 图

7-3　图示桁架在中点受集中力作用，试求杆df，ef及eg内的拉力。（提示：桁架的各组成部件的内力都是轴向力）。



题7-3图

第八章　材料力学基础

在进入对弹性力学的详细讨论之前，我们先来介绍一下有关材料力学的一些基础知识。材料力学也是固体力学的一个分支，它所研究的对象也符合理想弹性体的各项基本假设。与弹性力学不同的是：首先，它只研究杆状构件，也就是长度远大于宽度和厚度的构件；其次，在研究杆状构件时，它常常给出一些关于变形方式和应力分布方式的假定，这些假定使求解变得简便，但解答却常常只是近似的，不如弹性力学精确。既然如此，为什么还要介绍材料力学呢？这是因为，一方面材料力学的方法简便，计算工作量小，在工程上应用广泛；另一方面，材料力学所讨论的杆件的各种基本变形都很常见，其变形和应力分布也很直观，有助于我们增加对弹性体力学问题的感性认识。为此，我们对材料力学作些简要的介绍。

在本章中，我们将分别讨论杆状构件在受到拉压、剪切、扭转和弯曲这四种变形下的位移分布和应力分布。

§8.1　拉伸与压缩

起吊重物的钢索、桁架的杆件、液压油缸的活塞杆以及曲柄冲床（例 2.10）中的连杆等杆件在工作载荷下所发生的变形都可以看作拉伸或压缩变形。

1. 应力计算

图 8-1 a 所示的是均匀直杆受到轴向拉力 P 作用时的受力图。设横截面 mn 在加载前后都保持为平面，其横截面积为 F，则在截面 mn 上，内力的合力为 $N=P$（图 b），N 的作用线与杆轴重合，所以称为**轴力**。图 c 为杆件右部的受力图。由于横截面上的内力是均布的，可得拉杆横截面上的正应力为

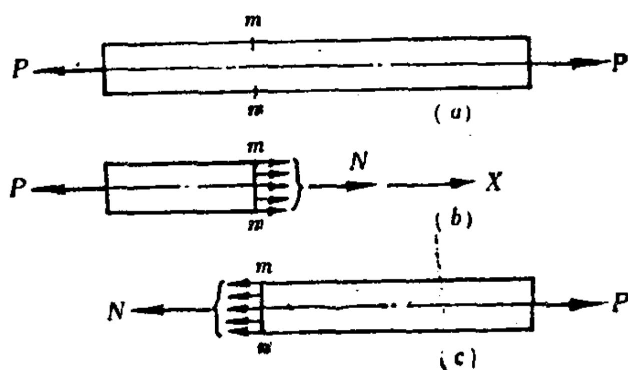


图 8-1

$$\sigma=\frac{N}{F}=\frac{P}{F} \tag{8.1}$$

上式已为大量实践所证实，适用于横截面为任意形状的等截面拉伸或压缩杆。通常规定：在轴向拉伸时，横截面上的轴力和应力（称为拉应力）为正；轴向压缩时，横截面上的轴力和应力(称为压应力)为负。公式（8.1）对远离外力作用点的截面都是适用的。在外力作用点附近，由于施加外力方式的多样性，外力沿横截面常是非均匀分布的，因此其附近的横截面上的应力也是非均布的，不能用（8.1）式计算应力。但是实验表明，对于拉(压)杆来说，只要外力合力的作用线沿杆轴，则外力非均布所引起的应力非均布现象是局部性的，在离外力作用点稍远处，外力分布方式对应力分布方式的影响即可忽略不计。

2. 强度计算

为了全面了解杆件的强度，我们进一步研究斜截面上的应力。以图 8-2 所示的杆为例，设截取的斜截面为 mk，它的法线与杆轴成 α 角，斜截面 mk 的面积为 $F_\alpha=F/\cos\alpha$，由图 8-2 b，斜截面上的应力为

$$p_\alpha=\frac{P}{F_\alpha}=\frac{P}{F}\cos\alpha=\sigma\cos\alpha$$

其中 $\sigma=P/F$ 是横截面上的正应力。为了研究方便，可将应力 p_α 分解为垂直于斜截面的正应力 σ_α 和相切于斜截面的剪应力 τ_α，由图 8-2 c 可知

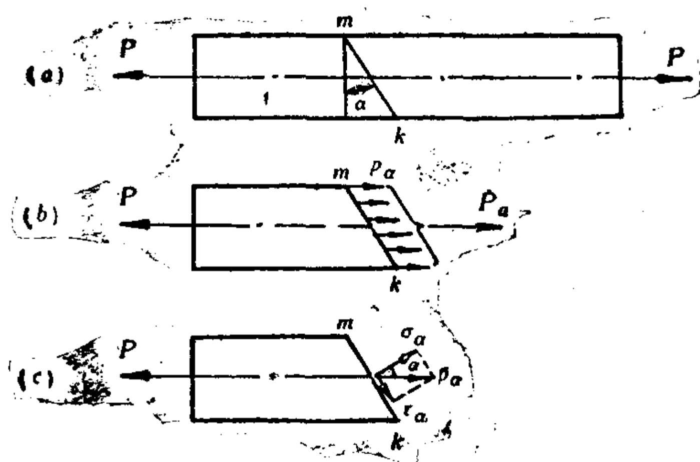


图 8-2

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha = \frac{\sigma}{2}(1+\cos 2\alpha) \tag{8.2}$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin\alpha = \sigma\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha \tag{8.3}$$

从上面两式可见，在各个不同方向的斜截面上，它们的正应力和剪应力都是不同的。最大正应力出现在 $\alpha=0$ 处，即出现在横截面上，且 $\sigma_{max}=\sigma$；而最大剪应力则出现在 $\alpha=\pi/4$ 的截面上，$\tau_{max}=\sigma/2$。

在工程上，常要求对受轴向拉(压)的杆件作强度计算，即要求实际工作应力不超过规定的材料许用应力 $[\sigma]$，以保证在规定的使用条件下不致因应力过大而发生破坏。于是，拉(压)杆件的**强度条件**为

$$\sigma_{max} = \left(\frac{N}{F}\right)_{max} \leqslant [\sigma] \tag{8.4}$$

3. 变形

直杆在轴向拉(压)力作用下会产生变形。设均质直杆原长为 l，横截面积为 F，在轴向拉力 P 的作用下沿轴线方向的伸长为 Δl，杆件在轴线方向的线应变为

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{8.5}$$

实验告诉我们，均匀弹性杆在轴向载荷的作用下，其应力 σ 与应变 ε 之间存在着一定的关系，这就是

$$\sigma = E\varepsilon \tag{8.6}$$

其中 E 是比例常数，称为材料的拉压弹性模量或**杨氏模量**，它的量纲与应力的量纲相同。各种材料的杨氏模量可在材料手册中查到（例如对低碳钢，$E \doteq 200 \times 10^9 \mathrm{N/m^2}$）。

公式(8.6)称为**虎克定律**，它是由英国科学家虎克首先建立的。当材料适用虎克定律时，称之为**线性弹性材料**。

由(8.1)式、(8.5)式和(8.6)式可知轴向总伸长量为

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} = \frac{Pl}{EF} \tag{8.7}$$

上式在杆件受压的情况下也是成立的，式中的 EF 常称为构件的**拉压刚度**，它反映了构件抵抗拉压变形的能力。注意(8.6)式和(8.7)式都仅在应力不超过一定限度时才成立。

例 8.1 一直径为 $d = 3$ cm 的等截面圆钢杆受到沿轴向的载荷作用，如图8-3a所示。设 $P_1 = 100$ kN，$P_2 = 140$ kN，$P_3 = 120$ kN。试求各段内力及总的变形。图示长度均为cm，钢杆弹性模量 $E = 200 \times 10^9 \mathrm{N/m^2}$。

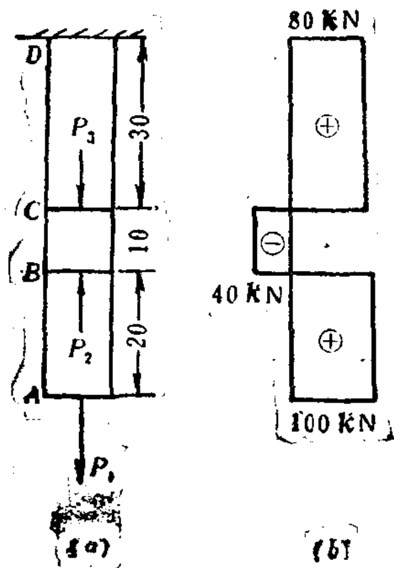


图 8-3

【解】 (1) 内力计算。根据截面法可求出各杆段的内力（轴力）：

AB 段：$N_1 = 100$ kN（拉力）

BC 段：$N_2 = 100 - 140 = -40$ kN（压力）

CD 段：$N_3 = 100 - 140 + 120 = 80$ kN（拉力）

将各杆段的轴力大小显示在图 b 上，可以直观地说明各杆段所受内力的情况。这种显示杆内轴力分布的图称为**轴力图**。

(2) 变形计算。先根据各段的内力，按公式(8.7)计算各分段的

变形，然后取代数和，即得整个杆的总变形量为

$$\Delta l = \frac{1}{EF}(N_1 \times 20 + N_2 \times 10 + N_3 \times 30) = 0.0283\ \text{cm}\ (伸长)$$

例 8.2 图 8-4 所示为等截面直杆，长为 l，横截面积为 F，材料单位体积的重量为 γ，弹性模量为 E。该杆受到图示的轴向拉力 P 作用，试求任一横截面 AB 上的应力和杆件的总伸长。

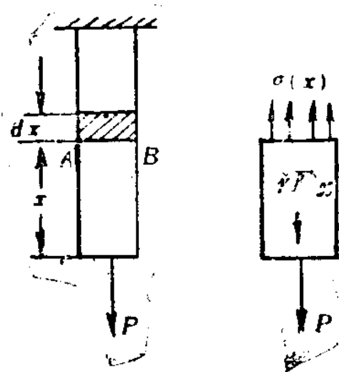


图 8-4

【解】 设截面 AB 与直杆下端的距离为 x，按照截面法，取截面 AB 以下的部分为分离体，该部分所受重力的合力为 γFx，由图 b 得 AB 面上的应力为

$$\sigma(x) = \frac{P + \gamma Fx}{F} = \frac{P}{F} + \gamma x$$

可见杆顶端的应力最大。

杆件的变形可由(8.7)式求出，但因重力是体积力，故要将(8.7)式改为积分式计算，即得

$$\Delta l = \int_0^l \frac{\sigma(x)}{E} \mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{1}{E}\int_0^l \left(\frac{P}{F} + \gamma x\right)\mathrm{d}x = \frac{pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E}$$

例 8.3 拉压静不定问题。在第二章中讨论的全是静定问题，现在有了材料力学知识，就可解决静不定问题了。静不定问题亦称超静定问题，必须以杆件的变形、变形的协调以及变形与内力的关系作为静平衡方程的补充，才可求解。

图 8-5 a 所示的结构由三根直杆组成。设杆 1 和杆 2 的材料、截面积及长度完全相同，分别记作 E、F 和 l。杆 3 的弹性模量、截面积及长度分别为 E_3、F_3 和 l_3。试求在图 a 所示重物 Q 的作用下各杆的内力。

【解】 本题共有三个未知数，即三杆的内力 N_1、N_2 和 N_3。三力构成平面共点力系，但只有两个平衡方程，因此这是一个超静定问题，

其求解步骤如下：

（1）列出静力平衡方程。图 8-5 *b* 为 A 点的受力图，由静力平衡方程得

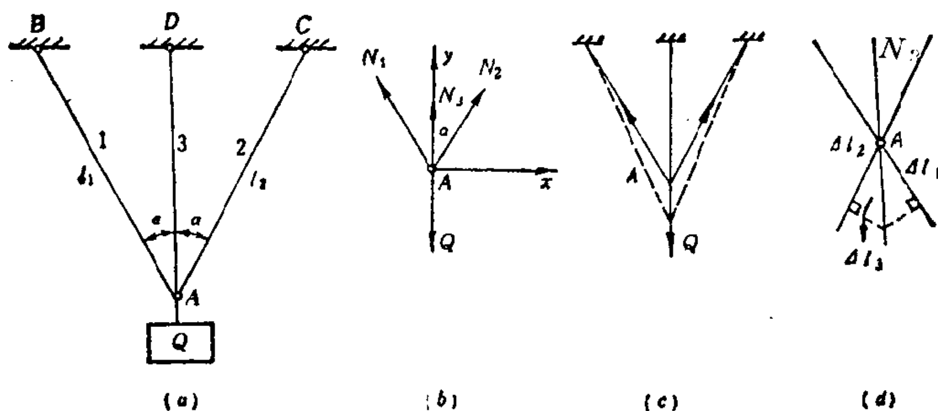


图 8-5

$$\Sigma F_x = 0: \qquad N_2 \sin\alpha - N_1 \sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0: \qquad Q - N_3 - N_1 \cos\alpha - N_2 \cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

由（1）式和（2）式可得

$$N_1 = N_2, \qquad N_3 = Q - 2N_1 \cos\alpha \qquad (3)$$

（2）变形计算。切断杆件 3，将 N_3 看作为未知的主动力（常称为赘余力），使系统成为静定结构。分别计算在载荷 Q 和赘余力 N_3 作用下 A 点的位移。

由图 8-5 *c*，在力 Q 作用下，杆 1 和杆 2 的内力为 $Q/2\cos\alpha$，两杆的伸长均为 $\Delta l = \dfrac{Ql}{2EF\cos\alpha}$，由此而引起 A 点的铅垂方向的位移为

$$\delta_1 = \frac{\Delta l}{\cos\alpha} = \frac{Ql}{2EF\cos^2\alpha}$$

同理，见图8-5 *d*，静定结构在赘余力 N_3 单独作用下（杆 1 和杆 2 均受压），A 点的铅垂方向的位移为

$$\delta_2 = \frac{-N_3 l}{2EF\cos^2\alpha}$$

由叠加原理，A 点总的铅垂位移为

$$\delta_A = \delta_1 + \delta_2 = \frac{l}{2EF\cos^2\alpha}(Q - N_3) \tag{4}$$

(3) 位移协调。A 点如有铅垂位移 δ_A，则杆 3 必须有相应的位移才可能保持结构的完整和连续。对杆 3 应用虎克定律可得

$$\delta_A = \frac{N_3 l_3}{E_3 F_3} \tag{5}$$

联立(4)式和(5)式即得

$$\frac{l}{2EF\cos^2\alpha}(Q - N_3) = \frac{N_3 l_3}{E_3 F_3}$$

注意到 $l_3 = l\cos\alpha$，则由上式可求得杆 3 的内力为

$$N_3 = \left(\frac{l_3}{E_3F_3} + \frac{l}{2EF\cos^2\alpha}\right)^{-1}\frac{lQ}{2EF\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{Q}{1 + 2\dfrac{EF}{E_3F_3}\cos^3\alpha} \tag{6}$$

将(6)式代入(3)式即得杆 1 和杆 2 的内力为

$$N_1 = N_2 = \frac{Q - N_3}{2\cos\alpha} = \frac{QEF\cos^2\alpha}{E_3F_3 + 2EF\cos^3\alpha} \tag{7}$$

由此结果可见，杆件内力与杆的拉压刚度 EF 有关。如果杆 1 和杆 2 不变，则当杆 3 的拉压刚度 E_3F_3 增大时，比值 EF/E_3F_3 就减小，N_3 也就越大。即若增大某杆的刚度，则该杆承受的轴力值亦相应地增大。

§8.2 剪　切

上一节讨论的是作用在某一截面法线方向上的内力和应力，以及由它们所引起的变形。这一节将介绍与作用平面相切的内力（剪应力）及其产生的变形（称为剪切变形），先举例说明。

图 8-6 a 为连接两薄板的铆钉。在图示载荷下该铆钉将产生剪切变形。此时铆钉的两侧受到一对大小相等、方向相反的力 P 作用（图

8-6 b)，这一对力的作用线间只有很小的距离。如截取铆钉的下半部分为脱离体(图 8-6 c)，则可知在截面 mn 上，分布内力系的合力 Q 必与力 P 平行，由平衡条件可得

$$Q=P \tag{8.8}$$

内力 Q 与截面 mn 相切，称为该截面上的剪力。受剪面上的实际变形和受力很复杂，现假设应力在剪切面上是均匀分布的，设 F为剪切面面积，则剪应力为

$$\tau=Q/F=P/F \tag{8.9}$$

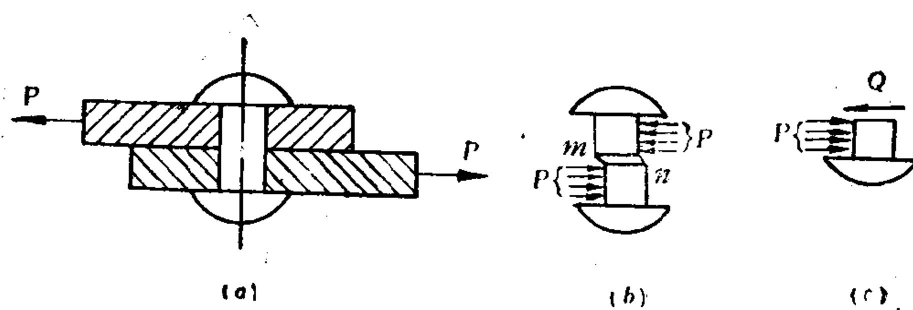


图 8-6

在设计螺栓、钉子、铆钉等受剪部件时，常应用方程(8.9)来确定部件的大小，使实际剪应力不超过材料的容许剪应力 [τ]，容许剪应力的大小通常是该材料的容许拉压力的 0.5 至 0.6 倍。

为了说明剪应力所产生的变形，我们研究一块很小的立方体单元并假设此单元没有承受法向应力。如果该立方体承受沿顶面分布的剪应力 τ，那么根据力的平衡条件可知，在单元底面上还必须作用有大小相等、方向相反的剪应力，这一对剪应力组成一个力偶矩，所以，根据力矩平衡的条件，单元体两侧面上也应有一对大小相等、方向相反的竖向剪应力，其大小也是 τ (见图 8-7 a)。因此，剪切变形发生时常有这样的特点：

(1) 作用于材料单元上的剪应力总是大小相等、方向相反地成对出现。

(2) 剪应力总是存在于两个相互垂直的平面上。在这两个平面上的剪应力大小相等，但它们的方向或是指向两垂直平面的交线，或是背

离两平面的交线。

仅承受剪应力的单元称之为**纯剪**状态。图 8-7 b 是纯剪状态下 材料的变形图。由该图可以看到，因为单元上没有法向的正应力作用，所以立方体边长不会改变。然而，剪应力将使正方 形 $abcd$ 变成斜方形，

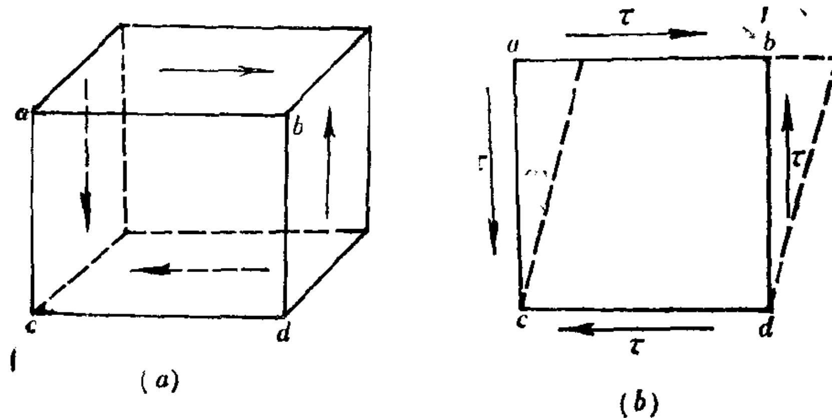


图 8-7

如图（8-7 b）中虚 线所示。c 点的直角 $\angle acd$ 在变形后减小了 γ，这个 γ 角称为**剪切应变**，是度量剪切变形大小的物理量。

根据实验得知，在弹性范围内，材料的剪应力与剪应变成正比。这个关系称为**剪切虎克定律**，即成立

$$\tau = G\gamma \tag{8.10}$$

其中比例常数 G 称为材料的**剪切弹性模量**。

§8.3 扭 转

若在杆件的两端作用两个大小相等、方向相反的力偶，其作用平面垂直于杆件的轴线。在这一对力偶作用下，杆件的任意两个横截面都发生绕杆件轴线的相对转动。这种形式的变形就称为**扭转**变形。例如汽车上与方向盘相连的转向轴就是一个受扭的杆件。这里我们仅讨论圆轴的扭转。下面将分别从几何、物理和静力平衡三个方面进行讨

论。

1. 几何方面

关于圆轴扭转有一个平面假设：圆轴扭转变形前的横截面在变形后仍保持为平面，其形状和大小不变；横截面的半径仍保持为直线，且相邻两截面间的距离不变。据此假设，在发生扭转变形时，圆轴的横截面像刚性平面一样绕轴线旋转了一个角度，但不同的横截面转过的角度不同。

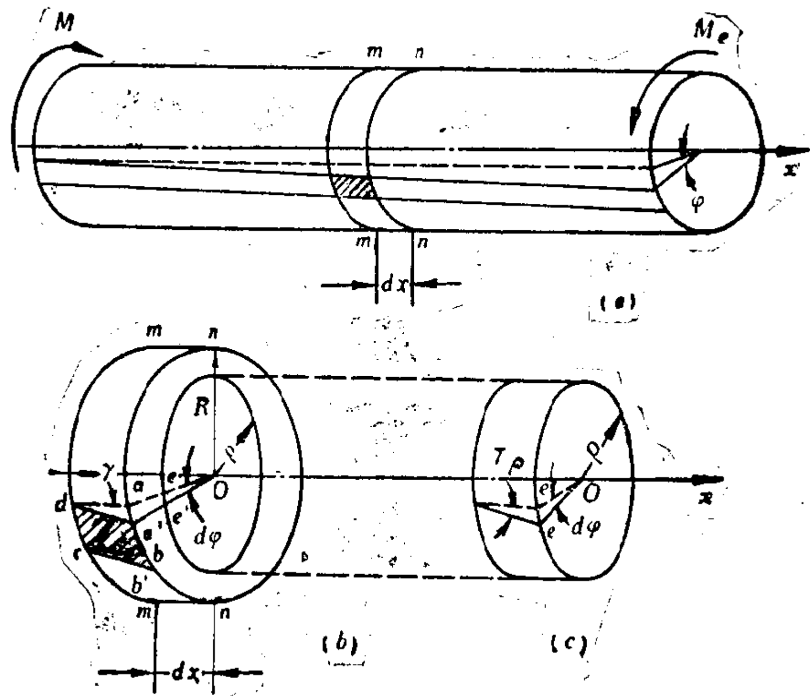


图8-8

在图 8-8 a 中，φ 角表示左、右两端截面的相对转角，称为扭转角，单位为弧度。现用相距为 $\mathrm{d}x$ 的两个横截面 mm 和 nn 从轴中截出一个微段，如图 8-8 b 所示。在此微段上用两个夹角无限小的径向截面截取一个楔形的单元体，它在圆轴表层的面积记作 $abcd$。当圆轴发生扭转变形后，设该微段的两端截面 mm 和 nn 的相对转角为 $\mathrm{d}\varphi$，则由平面假设，楔形单元体上的半径 oa 和 ob 也转过 $\mathrm{d}\varphi$ 角而分别到达 oa' 和 ob'，所以单元体表层的矩形 $abcd$ 改变为平行四边形 $a'b'cd$，即产生剪切变形。直角 $\angle adc$ 的改变量为

$$\gamma(\angle ada')\approx \mathrm{tg}\,\gamma=\frac{aa'}{ad}=R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

γ 就是微段边缘 d 点处的剪应变。同理可知，楔形单元体上距圆心为 ρ 处的矩形面也产生剪切变形(图 8-8 c),其剪应变是

$$\gamma_\rho=\rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{8.11}$$

上式中 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$ 为扭转角沿轴线 x 的变化率。

2. 物理方面

根据剪切虎克定律(8.10)式，可得横截面上距圆心为 ρ 的任意点处的剪切应力为

$$\tau_\rho=G\gamma_\rho=G\rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{8.12}$$

又因 γ_ρ 发生在垂直于轴半径的平面内,所以 τ_ρ 也与半径相垂直。

3. 静力平衡方面。

(8.12) 式表明,横截面上的剪应力沿径向线性分布,如图 8-9 所示,而整个横截面上的内力系组成一个内力偶矩,其大小为

$$\int_F \rho\tau_\rho\,\mathrm{d}F$$

其中 $\mathrm{d}F=2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho$ 是横截面上的环形面积微元。根据扭矩的定义，现在的内力偶矩就是该截面上的扭矩 M_K,即

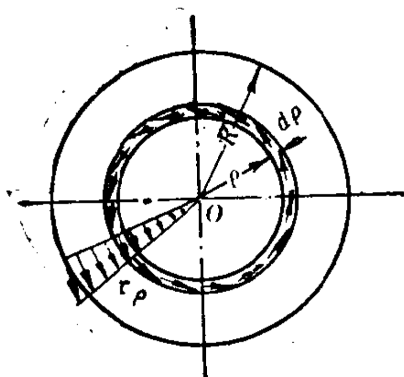


图 8-9

$$M_K=\int_F \tau_\rho\rho\,\mathrm{d}F=G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\int_F \rho^2\mathrm{d}F$$

记

$$J=\int_F \rho^2\,\mathrm{d}F \tag{8.13}$$

为横截面对 O 点的极惯性矩,它只与横截面的几何尺寸有关。

于是我们得到圆轴扭转时,扭矩 M_K 与角位移 $\mathrm{d}\varphi$ 之间的关系为

$$M_K=GJ\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{8.14}$$

将上式代回(8.12)式，即得

$$\tau_{\rho}=\frac{M_{K}\rho}{J} \tag{8.15}$$

由此即可计算横截面上距圆心为 ρ 的任意点处的剪应力。

根据剪应力的分布规律可知，实心轴的内层材料只承受很小的载荷。因此，用同样多的材料做成的空心圆杆比做实心圆杆的抗扭能力更强。

为了求得扭转时的变形量，即扭转角 φ，只要利用(8.14)式，就可求得

$$\varphi=\int_{l}\mathrm{d}\varphi=\int_{l}\frac{M_{K}}{GJ}\mathrm{d}x \tag{8.16}$$

其中 φ 是相距为 l 的两个横截面间的相对转角。

还应指出，上述公式的应用是有条件的，它们只适用于圆截面轴，而且横截面上的最大剪应力不得超过规定的极限值，即不超过材料的剪切比例极限。

例 8.4 如图 8-10 所示，由无缝钢管制成的汽车传动轴 AB，外径为 $D=90$ mm，壁厚为 $t=2.5$ mm，材料为 45 号钢，使用时的最大扭矩为 $M=1.5$ kN·m。试求轴的最大剪应力 τ_{max}。

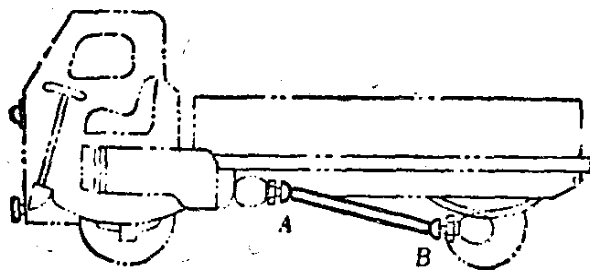


图 8-10

【解】先计算横截面(即圆环)的极惯矩。因轴的内径为 $d=D-2t$，故极惯矩为

$$J=\int_{F}\rho^{2}\mathrm{d}F=\int_{0}^{2\pi}\int_{d/2}^{D/2}\rho^{3}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{32}(D^{4}-d^{4})$$

$$=\frac{\pi}{32}(90^4-85^4)=1.316\times10^6\text{mm}^4=1.316\times10^{-6}\text{m}^4$$

因最大剪应力出现在圆轴的最外缘，由（8.15）式得

$$\tau_{max}=\frac{MD}{2J}=\frac{1.5\times0.045}{1.316\times10^{-6}}=51\times10^3\text{ kN/m}^2$$

§8.4 弯　曲

若作用于杆件上的外力垂直于杆件的轴线并使变形前本来为直线的轴线在变形后成为曲线，这种形式的变形称为**弯曲变形**。凡是以弯曲变形为主的杆件，在习惯上称为**梁**。例如桥式起重机的大梁、火车的轮轴等。

梁的弯曲也可以有各种复杂的情况，在本节中我们将集中讨论较简单的情形，即只讨论静定梁的平面弯曲。

所谓**平面弯曲**，是指作用于杆件上的所有外力都在一个包含轴线的纵向对称平面之内（见图 8-11），弯曲变形后的轴线也是位于此对称面内的一条曲线。

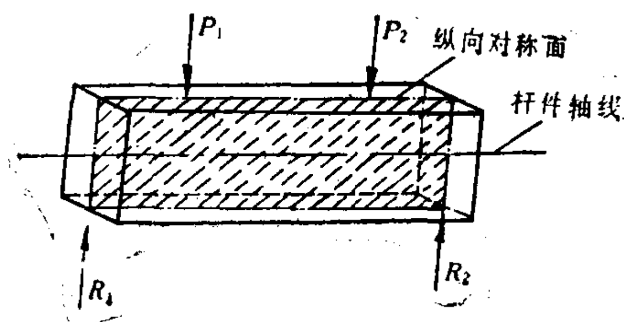


图 8-11

所谓**静定梁**，是指支座反力可由静力平衡条件完全确定的梁（不符合此条件的梁称为**静不定梁**）。下列三种梁都是静定梁。

（1）简支梁。梁的两端分别为固定铰链支座和滑动铰链支座，图 8-12 *a* 所示为简支梁的计算简图（注意，工程实际中梁的支座和载荷较复杂，我们在这里采用的都是经过简化的计算简图）。

（2）悬臂梁，又称肱梁。梁的一端为固定端（夹住或嵌入），另一端为自由端，如图 8-12 b 所示。

（3）外伸梁。梁的两个支座分别是固定铰链支座及滑动铰链支座，但梁有一端（或两端）伸出在支座之外，如图 8-12c 所示。

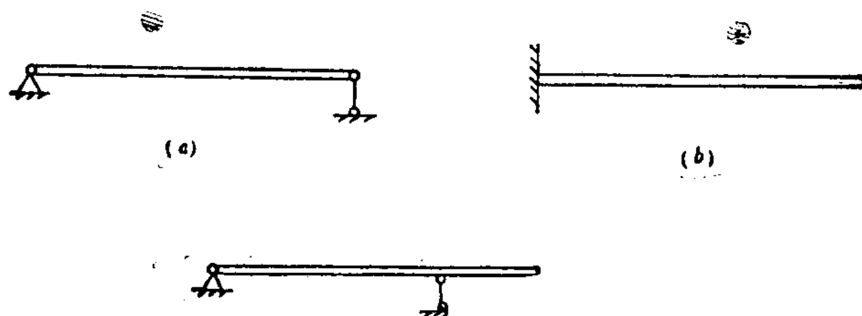


图 8-12

至于梁上的载荷，主要有集中力、分布力和集中力偶等。

以下对受平面弯曲的静定梁，讨论它在载荷作用下产生的剪力、弯矩、应力分布以及梁轴由于变形所成的挠曲线。

1．载荷、剪力和弯矩

若已知梁上的载荷，由平衡条件就可求得静定梁的支座反力，于是就可计算截面上的内力。

为了求出梁的某截面上的内力，可沿该截面把梁分成左、右两段。任取一段为平衡对象，列出平衡方程即可求得该截面上内力系的主矢 Q 和对截面形心的主矩 M。该主矢 Q 是与横截面相切的，故称为截面上的**剪力**，而内力的主矩 M（矢量）是与梁的纵向平面垂直的，称为该截面上的**弯矩**。剪力和弯矩是随截面位置不同而变化的，通常以横坐标 x 表示横截面在梁轴线上的位置，则各截面上的剪力和弯矩都是 x 的连续函数，即

$$Q=Q(x),\quad M=M(x)$$

在求截面内力时，我们希望不论取右段梁或左段梁为平衡对象，所求得的同一截面的内力不仅数值相同而且符号也一致。为此，规定梁微元横截面上的轴力 N、剪力 Q 和弯矩 M 的正负号规则如图 8-13 所示。从图上可以看出，轴力的正向沿截面的法向朝外，正的剪应力使

其所在的微元有顺时针转动的趋势，而正的弯矩使微元弯曲变形时凸面向下。

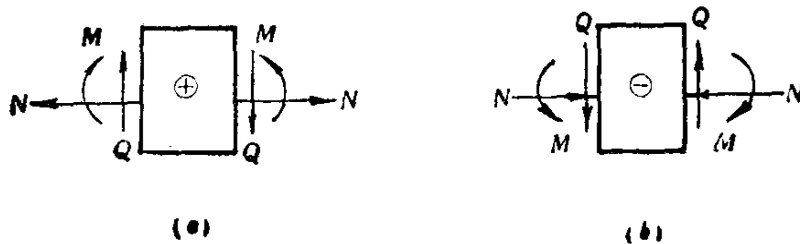


图 8-13

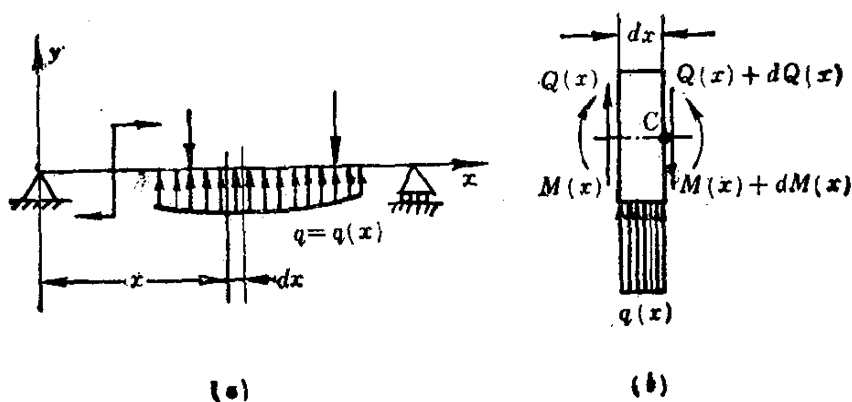


图 8-14

为了导出载荷、剪力和弯矩之间的关系式，研究如图 8-14*a* 所示的梁，建立直角坐标系，并取 x 轴沿梁的轴线方向。现从梁中取出长为 $\mathrm{d}x$ 的线段，其上作用有分布载荷 $q(x)$，按内力正号规则作出如图 8-14*b* 所示的受力图，图中 C 是截面的形心。列出平面力系的平衡方程为

$\Sigma F_y=0$：$\quad Q(x)-[Q(x)+\mathrm{d}Q(x)]+q(x)\mathrm{d}x=0$

即
$$\frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x}=q(x) \tag{8.17}$$

$\Sigma L_{cz}=0$：$\quad M(x)+\mathrm{d}M(x)-M(x)-Q(x)\mathrm{d}x-q(x)\mathrm{d}x\dfrac{\mathrm{d}x}{2}=0$

略去二阶小量，可得

$$\frac{\mathrm{d}\,M(x)}{\mathrm{d}\,x}=Q(x) \tag{8.18}$$

如将上式求导一次，并利用（8.17）式，即得

$$\frac{\mathrm{d}^2\,M(x)}{\mathrm{d}\,x^2}=q(x) \tag{8.19}$$

(8.17)—(8.19）三式给出了载荷集度、剪力和弯矩间存在的关系，据此可以校核由截面法求出的剪力和弯矩，也可以根据载荷集度通过积分求出剪力和弯矩。

公式（8.17)—(8.19）是对分布载荷导出的。对于集中载荷，利用 δ 函数可以作相应的处理，只要注意到 δ 函数和单位阶跃函数 $1(x-a)$ 的以下性质：

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(x-a)\mathrm{d}\,x=1(x-a)=\begin{cases}0 & x\leqslant a\\ 1 & x>a\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)f(x)\mathrm{d}\,x=f(a)$$

$$\int_{-\infty}^{x}1\,(x-a)\mathrm{d}\,x=(x-a)\cdot 1(x-a)$$

具体求解方法参见例 8.5 的解析法。

例 8.5　简支梁 AB 受集中力 P 的作用，如图 8-15 a，试求任一截面处的剪力 $Q(x)$ 和弯矩 $M(x)$。

【解法一】 截面法。

(1) 以梁为平衡对象，求 A、B 的支座反力。由图 8-15 a，可得

$$R_A=\frac{Pb}{l},\qquad R_B=\frac{Pa}{l} \tag{1}$$

(2) 设 $x<a$，取左段梁为平衡对象，由图 8-15 b，得

$$Q(x)=\frac{Pb}{l},\quad M(x)=\frac{Pb}{l}x\quad(x<a) \tag{2}$$

(3) 设 $x>a$，取右段梁为平衡对象，由图 8-15 c，得

$$Q(x)=-\frac{Pa}{l},\quad M(x)=\frac{Pa}{l}(l-x),(a\leqslant x\leqslant l) \tag{3}$$

(4) 在工程上习惯用图形表示 $Q(x)$ 和 $M(x)$，称为剪力图和弯

矩图，如图 8-15 d 和 8-15 e。

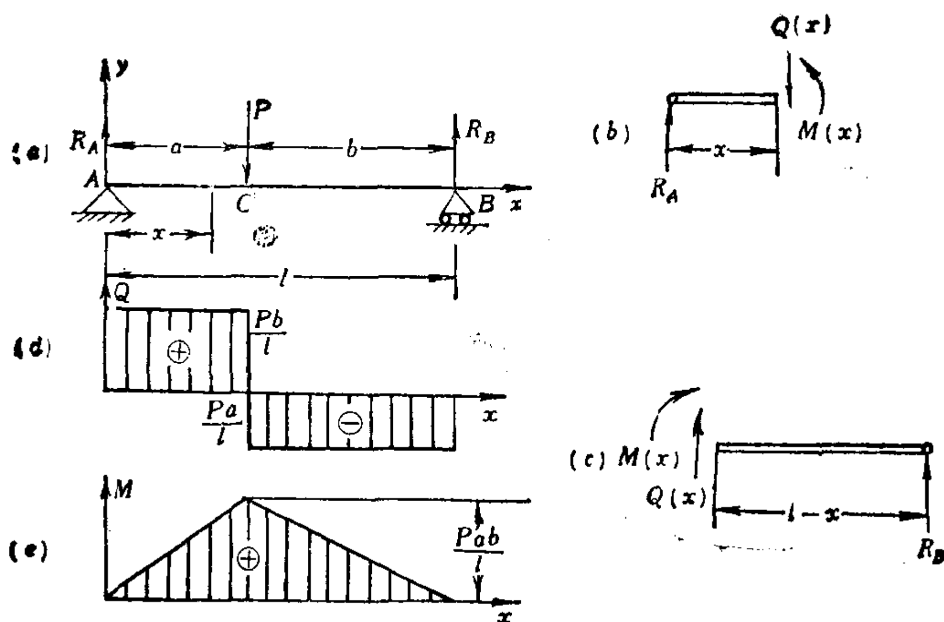


图 8-15

【解法二】解析法。

把支座反力和集中力都看作为分布载荷：即

$$q(x)=\frac{Pb}{l}\delta(x)-P\delta(x-a)+\frac{Pa}{l}\delta(x-l) \tag{4}$$

再利用 (8.17) 和 (8.18) 式，即可求出剪力和弯矩函数为

$$Q(x)=\int q(x)\mathrm{d}\,x=\frac{Pb}{l}-P\cdot 1(x-a)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{Pb}{l}, & (x\leqslant a)\\[2mm] \dfrac{Pb}{l}-P=-\dfrac{Pa}{l}, & (a<x\leqslant l)\end{cases} \tag{5}$$

$$M(x)=\int Q(x)\mathrm{d}\,x=\frac{Pb}{l}x-P(x-a)\cdot 1(x-a)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{Pb}{l}x, & (x\leqslant a)\\[2mm] \dfrac{Pb}{l}x-P(x-a)=\dfrac{Pa}{l}(l-x), & (a<x\leqslant l)\end{cases} \tag{6}$$

以上结果与截面法完全相同。

例 8.6　刚架 ACB 由竖直杆 AC 和水平杆 CB 在 C 点刚性连接(保持直角)而成，如图 8-16 a。求各个截面上的剪力 Q 和弯矩 M。

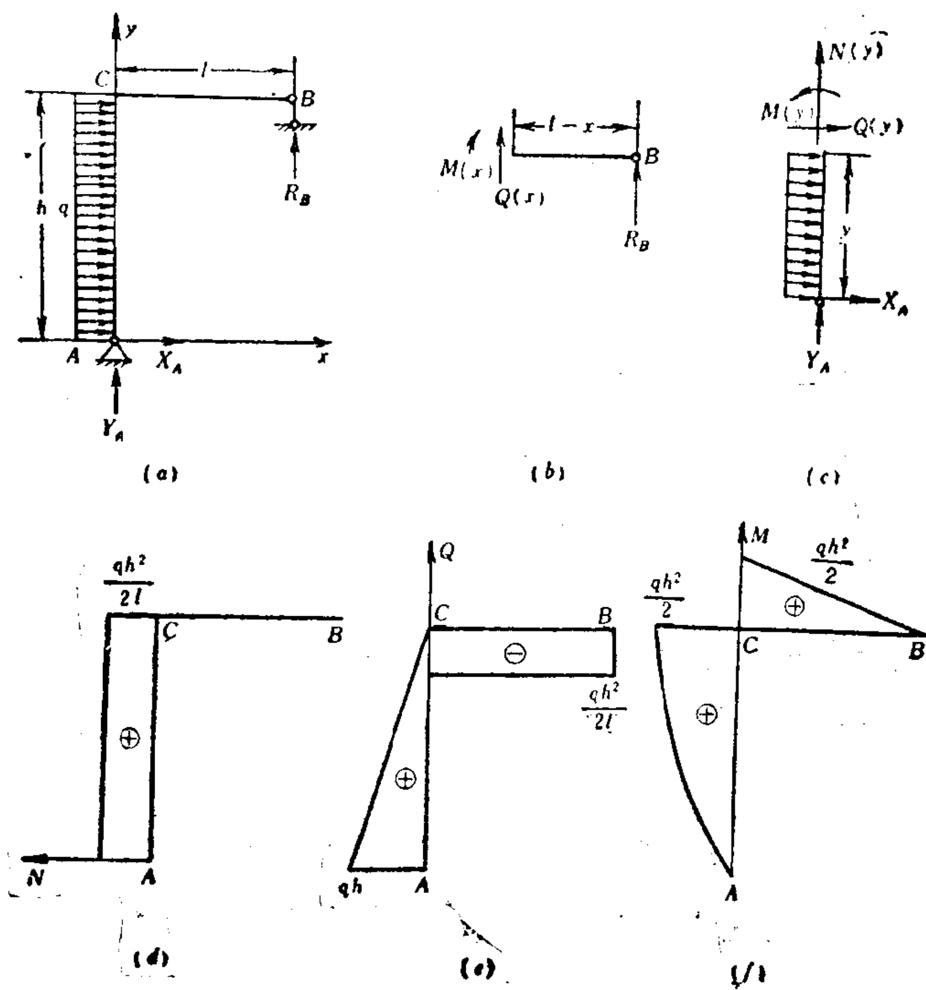


图 8-16

【解】本题不是直梁，可称为折梁，但仍是静定的，可用截面法求解。如图 8-16 a，建立直角坐标系 Axy。

(1) 取整体为平衡对象，如图 8-16 a，求支座反力。

$$\Sigma F_x = 0: \qquad X_A = -qh \tag{1}$$

$$L_{Az} = 0: \qquad \frac{h}{2}qh - lR_B = 0,\ 即 \quad R_B = \frac{qh^2}{2l} \tag{2}$$

$$\Sigma F_y = 0: \qquad Y_A = -R_B = -\frac{qh^2}{2l} \tag{3}$$

(2) 截取水平杆的右段为平衡对象，如图 8-16 b。

$$\Sigma E_y = 0: \qquad Q(x) = -R_B = -\frac{qh^2}{2l}, \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{4}$$

$$L_{Bz} = 0: \qquad M(x) = -(l-x)Q(x) = \frac{qh^2}{2l}(l-x), \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{5}$$

(3) 截取竖直杆的下段为平衡对象，在截面上还应有 轴力 N，如图 8-16 c。

$$\Sigma F_x = 0: \qquad Q(y) = -X_A - qy = q(h-y), \quad (0 \leqslant y \leqslant h) \tag{6}$$

$$\Sigma F_y = 0: \qquad N(y) = -Y_A = \frac{qh^2}{2l}, \quad (0 \leqslant y \leqslant h) \tag{7}$$

$$L_{Az} = 0: \qquad M(y) = y \cdot Q(y) + \frac{y}{2} qy = qy\left(h - \frac{y}{2}\right),$$

$$(0 \leqslant y \leqslant l) \tag{8}$$

根据(4)—(8)式，即 可 画出折梁的轴力图（图 8-16 d），剪力图（图 8-16 e）和弯矩图（图 8-16f）。

2. 纯弯曲时的应力分布

在求出梁的横截面上的剪力和弯矩后，为了解决梁的强度问题，还必须了解横截面上各点的应力分布。在弯曲问题的强度计算中，一般说正应力比剪应力重要得多，所以，现在我们来讨论纯弯曲（梁的各个截面上剪力为零，弯矩是常数）时横截面上的正应力分布。

设想梁由无数层纵向纤维组成，在弯曲变形中长度保持不变的一层纤维称为**中性层**。而所谓中性轴就是横截面与梁的中性层的交线，它垂直于梁的纵向对称面，见图 8-17。

类似于圆轴扭转，梁的弯曲变形也有平面假设：变形前梁的横截面在变形后仍保持为平面，并且仍然垂直于变形后的梁轴线，只是绕截面内的中性轴转过一个角度。

根据平面假设，相距为 dx 的两个横截面间的一段梁，变形后如图 8-18 a 所示。图中 ρ 是中性层的曲率半径，$d\theta$ 是两个截面之 间的相对转角，由图，$dx = \widehat{OO'} = \rho\, d\theta$。令横截面的对称轴为 y 轴，中性轴为 z 轴，如图 8-18 b。则距中性层为 y 处的纵向纤维的线应变为

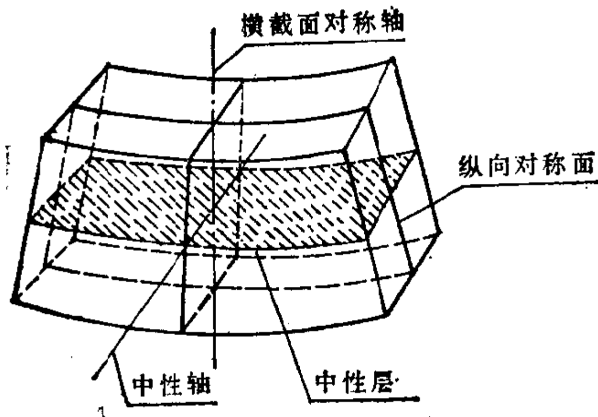


图 8-17

$$\varepsilon=\frac{\widehat{bb'}-\widehat{OO'}}{\widehat{OO'}}=\frac{(\rho+y)\mathrm{d}\theta-\rho\,\mathrm{d}\theta}{\rho\,\mathrm{d}\theta}=\frac{y}{\rho} \tag{8.20}$$

若对每一纵向纤维都应用拉(压)虎克定律(8.6)式,则得

$$\sigma=E\varepsilon=E\frac{y}{\rho} \tag{8.21}$$

上式表明,正应力与该纤维到中性层的距离成正比,如图8-18 c 所示。显然中性轴上的正应力为零。

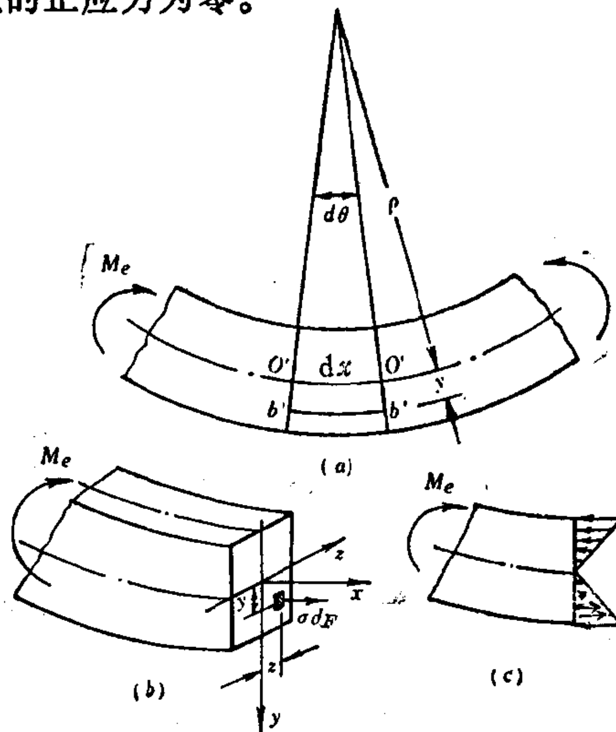


图 8-18

(8.20)式中的曲率半径 ρ 以及中性轴的位置都是未知的。为了求得它们，可利用截面法。取左边梁段为平衡对象(图 8-12 b)，注意到左端截面上只有弯矩 $M=M_e$ 作用，由平衡条件即可得

$$\Sigma F_x=0: \quad \int_F \sigma \, dF=0 \quad 即 \quad \frac{E}{\rho}\int y \, dF=0$$

可见中性轴通过横截面的形心。

$$L_z=0: \quad -M+\int_F \sigma y \, dF=0 \quad 即 \quad \frac{E}{\rho}\int y^2 \, dF=M$$

令

$$\int y^2 \, dF=J_z \tag{8.22}$$

我们称 J_z 为横截面对于中性轴 z 的惯矩。由此可求得变形后轴线的曲率为

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EJ_z} \tag{8.23}$$

上式表明，EJ_z 越大，在同样弯矩的作用下，梁变形后的曲率 $1/\rho$ 就越小，所以把 EJ_z 称为梁的抗弯刚度。将 (8.23) 式代入 (8.21)式，就得到纯弯曲时梁横截面上的正应力计算公式

$$\sigma=\pm\frac{M}{J_z}|y| \tag{8.24}$$

当弯矩M为正时，梁的凸侧受拉应力，σ 取正号，而梁的凹侧受压应力，σ 取负号(图8-12c)。

由 (8.24) 式可知，梁横截面上的最大正应力出现在离中性轴最远处，而在中性轴附近的材料只承受很小的载荷，所以在工程上常采用工字型或 T 字型的型材作为抗弯材料，它比相同质量的矩形或圆截面型材有更强的抗弯能力。

例 8.7 图 8-19 a 所示为 T 形截面铸铁梁。T 形横截面尺寸如图b 所示。已知截面对形心轴z 的惯性矩为 $J_z=763\ \text{cm}^4$，且 $|y_1|=52$ mm，试求最大拉应力和最大压应力。

【解】 (1) 支座反力、剪力和弯矩。由静力平衡条件可得

$R_A=2.5\ \text{kN}$，$R_B=10.5\ \text{kN}$，方向如图 8-19 a 所示， (1)

则梁的载荷为

$$q(x)=2.5\,\delta(x)-9\,\delta(x-1)+10.5\,\delta(x-2) \tag{2}$$

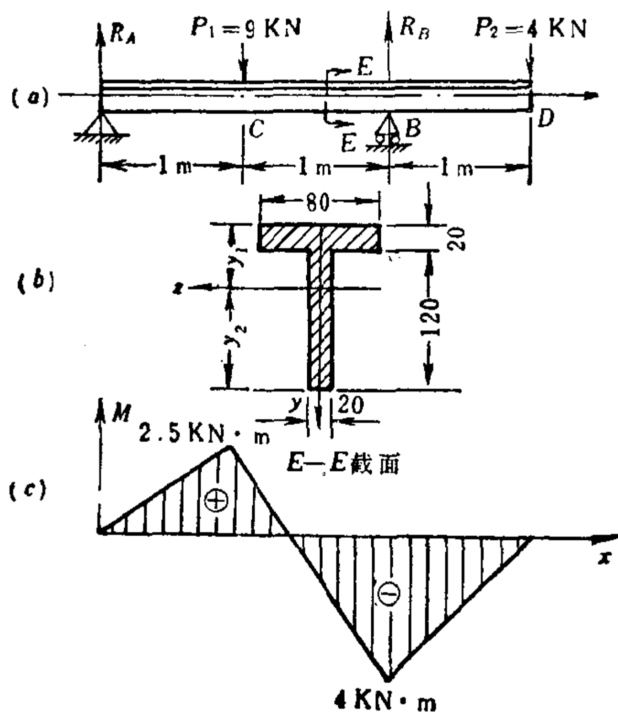


图8-19

上式中没有写入右端 D 处的集中载荷，因为它对下面所作的计算没有影响。将(2)式积分即可得剪力和弯矩分别为

$$Q(x)=\begin{cases}2.5 & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ -6.5 & (1<x\leqslant 2)\\ 4 & (2<x\leqslant 3)\end{cases},\quad M(x)=\begin{cases}2.5x & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ -6.5x+9 & (1<x\leqslant 2)\\ 4x-12 & (2<x\leqslant 3)\end{cases} \tag{3}$$

弯矩图如图 8-19 c 所示。可见最大正弯矩出现在截面 C 处，$M_C=2.5$ kN·m；最大负弯矩在截面 B 处，$M_B=-4$ kN·m。

(2) 正应力。由正应力公式(8.24)可知，只要对具有最大弯矩的截面计算拉应力和压应力。

对截面 B，M_B 为负，上部纤维受拉，下部纤维受压，则最大正应力为

$$\sigma_{B拉}=\frac{M_B y_1}{J_z}=\frac{4\times10^3\times52\times10^{-3}}{763(10^{-2})^4}=27.2\times10^6\ \text{N/m}^2$$

$$=27.2\ \text{MN/m}^2 \tag{4}$$

$$|\sigma_{B压}| = \frac{M_B y_2}{J_z} = \frac{4\times10^3(120+20-52)\times10^{-3}}{763(10^{-2})^4}$$

$$= 46.2\times10^6\ \text{N/m}^2 = 46.2\ \text{MN/m}^2 \qquad (5)$$

对截面 C, M_C 为正，最大拉应力在截面下边缘各点，为

$$\sigma_{C拉} = \frac{M_C y_2}{J_z} = \frac{2.5\times10^3(120+20-52)\times10^{-3}}{763(10^{-2})^4}$$

$$= 28.8\times10^6\text{N/m}^2 = 28.8\ \text{MN/m}^2 \qquad (6)$$

由 (4)、(5) 和 (6) 三式可见，最大拉应力为 28.8 MN/m²，最大压应力为 46.2 MN/m²。对于铸铁，容许的抗拉应力一般为 $[\sigma_1] = 30$ MN/m²，而容许的抗压应力为 $[\sigma_2] = 60$ MN/m²。本题均未超过，这时，我们称为满足强度条件。

3. 梁的弯曲变形——挠曲线

在梁的纵向对称面内建立直角坐标系，如图 8-20 所示。选取变形前的梁轴为 x 轴，变形后，横截面的形心在垂直梁轴(x 轴)方向的线位移称为**挠度**，用纵坐标 v 表示。一般情况下，不同横截面的挠度是不同的，所以曲线 $v=v(x)$ 代表变形后的梁轴线，称为**挠曲线**或挠曲轴。横截面的角位移 θ 称为该截面的转角。由于忽略剪力对变形的影响，所以当梁变形时，横截面仍保持为平面并与挠曲轴正交。这样，任一横截面的转角 θ 就等于挠曲线在该截面处的切线与 x 轴的夹角。又因为在工程实际中，挠曲线是很平坦的，即转角 θ 很小，故有

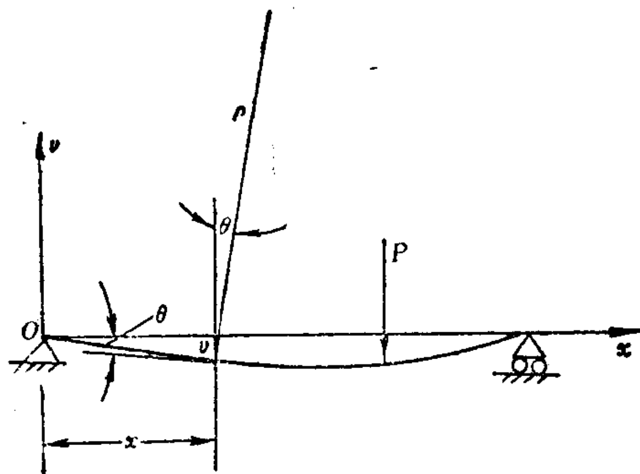


图8-20

$$\theta \doteq \mathrm{tg}\theta = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,x} = v'(x) \tag{8.25}$$

现在来导出挠曲线 $v=v(x)$ 所满足的微分方程。假设梁的跨度远大于横截面的高度,这时,可以略去由剪力而引起的弯曲变形，而认为弯矩 M 和相应的曲率半径 ρ 均为 x 的函数,则纯弯曲时的 (8.23) 式对一般变形也成立，故可写成

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EJ_z} \tag{8.26}$$

将平面曲线的曲率公式

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{|v''(x)|}{[1+(v')^2]^{3/2}}$$

代入 (8.26) 式,即得

$$\frac{|v''(x)|}{[1+(v'(x))^2]^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ_z} \tag{8.27}$$

上式称为挠度曲线的微分方程,它是一个二阶非线性常微分方程。在工程问题中,梁的变形一般均很小,转角 θ 不超过 $1°$，即 (8.25) 式成立，因此 (8.27) 式中的 $[v'(x)]^2$ 可以略去。

如取挠度 v 向上为正，并考虑到图 8-21 的正负号规则，那么，(8.27) 式可以简化为

$$EJ_z\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\,x^2} = M(x) \tag{8.28}$$

上式就是常用的挠曲线的近似微分方程。

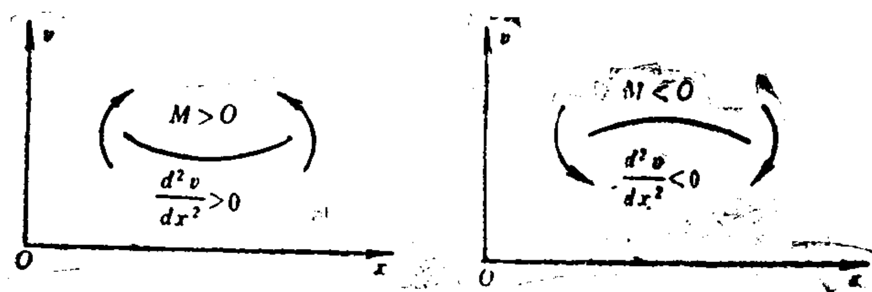


图 8-21

将(8.28)式求导两次，并利用(8.19)式，得

$$EJ_z\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4}=q(x) \tag{8.29}$$

它也是梁的挠曲线近似微分方程。所以求梁的挠曲线就是求解常微分方程(8.28)或(8.29)式的边值问题。通常可根据已知载荷由解析法或截面法求出弯矩函数 $M(x)$，再由微分方程(8.28)求得挠曲线 $v(x)$。常见的齐次边界条件如表 8.1 所示。

表 8.1

边界($x=0$)	挠度 $v(0)$	转角 $\theta(0)$	弯矩 $M(0)$	剪力 $Q(0)$
简支端	0		0	
固定端	0	0		
自由端			0	0
滑动端		0		0

梁的挠度曲线可直接用于校核弯曲变形的大小(称为刚度校核)，此外，还经常用于求解静不定系统和计算振动问题。常用的挠度曲线见表 8.2

例 8.8 内燃机中的凸轮轴或某些齿轮轴可以简化成在集中力 P 作用下的简支梁，如图 8-22 示。现已知梁的抗弯刚度为 EJ，试求此简支梁的挠曲线微分方程。

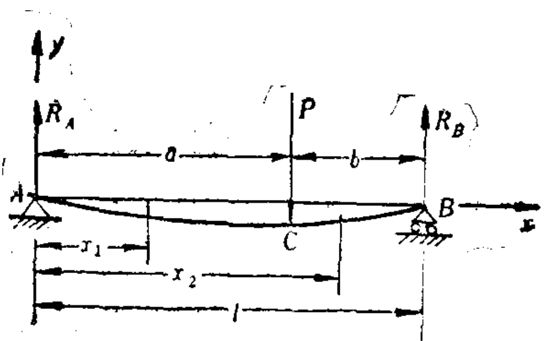


图 8-22

表 8-2　梁在简单载荷作用下的变形

序号	梁的简图	挠曲线方程	端截面转角	最大挠度
1		$v=-\dfrac{Mx^2}{2EI}$	$\theta_B=-\dfrac{Ml}{EI}$	$f_B=-\dfrac{Ml^2}{2EI}$
2		$v=-\dfrac{Mx^2}{2EI}$　$0\leqslant x\leqslant a$ $v=-\dfrac{Ma}{EI}\left[(x-a)+\dfrac{a}{2}\right]$　$a\leqslant x\leqslant l$	$\theta_B=-\dfrac{Ma}{EI}$	$f_B=-\dfrac{Ma}{EI}\left(l-\dfrac{a}{2}\right)$
3		$v=-\dfrac{Px^2}{6EI}(3l-x)$	$\theta_B=-\dfrac{Pl^2}{2EI}$	$f_B=-\dfrac{Pl^3}{3EI}$

续表

4		$v=-\frac{Px^2}{6EI}(3a-x)$ $0\leqslant x\leqslant a$ $v=-\frac{Pa^2}{6EI}(3x-a)$ $0\leqslant x\leqslant l$	$\theta_B=-\frac{Pa^2}{2EI}$	$f_B=-\frac{Pa^2}{6EI}(3l-a)$
5		$v=-\frac{qx^2}{24EI}(x^2-4lx+6l^2)$	$\theta_B=-\frac{ql^3}{6EI}$	$f_B=-\frac{ql^4}{8EI}$
6		$v=-\frac{Mx}{6EIl}(l-x)(2l-x)$	$\theta_A=-\frac{Ml}{3EI}$ $\theta_B=\frac{Ml}{6EI}$	$x=(1-\frac{1}{\sqrt{3}})l$ $f_{max}=-\frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI}$ $x=\frac{l}{2}$, $f_{\frac{l}{2}}=-\frac{Ml^2}{16EI}$
7		$v=-\frac{Mx}{6EIl}(l^2-x^2)$	$\theta_A=-\frac{Ml}{6EI}$ $\theta_B=\frac{Ml}{3EI}$	$x=\frac{l}{\sqrt{3}}$ $f_{max}=-\frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI}$ $x=\frac{l}{2}$, $f_{\frac{l}{2}}=-\frac{Ml^2}{16EI}$

序号	梁的简图	挠曲线方程	端截面转角	最大挠度
8	A, B, M, θ_A, θ_B, a, b, l	$v=\frac{Mx}{6EIl}(l^2-3b^2-x^2)$, $0\leqslant x\leqslant a$ $v=\frac{M}{6EIl}[-x^3+3l(x-a)^2+(l^2-3b^2)x]$, $a\leqslant x\leqslant l$	$\theta_A=\frac{M}{6EIl}(l^2-3b^2)$ $\theta_B=\frac{M}{6EIl}(l^2-3a^2)$	
9	P, A, B, f, θ_A, θ_B, $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$	$v=-\frac{Px}{48EI}(3l^2-4x^2)$, $0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}$	$\theta_A=-\theta_B=-\frac{Pl^2}{16EI}$	$f=-\frac{Pl^3}{48EI}$
10	P, A, B, θ_A, θ_B, a, b, l	$v=-\frac{Pbx}{6EIl}(l^2-x^2-b^2)$, $0\leqslant x\leqslant a$ $v=-\frac{Pb}{6EIl}[\frac{l}{b}(x-a)^3+(l^2-b^2)x-x^3]$, $a\leqslant x\leqslant l$	$\theta_A=-\frac{Pab(l+b)}{6EIl}$ $\theta_B=\frac{Pab(l+a)}{6EIl}$	设$a>b$，在$x=\sqrt{\frac{l^2-b^2}{3}}$处， $f_{max}=-\frac{Pb(l^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIl}$，在$x=\frac{l}{2}$处， $f_{\frac{l}{2}}=-\frac{Pb(3l^2-4b^2)}{48EI}$

续表

11		$x=-\frac{qx}{24EI}(l^3-2lx^2+x^3)$	$\theta_A=-\theta_B=-\frac{ql^3}{24EI}$	$f=-\frac{5ql^4}{384EI}$
12		$v=\frac{Pax}{6EIl}(l^2-x^2)$, $0\leqslant x\leqslant l$ $v=-\frac{P(x-l)}{6EI}[a(3x-l)-(x-l)^2]$, $l\leqslant x\leqslant(l+a)$	$\theta_A=-\frac{1}{2}\theta_B=\frac{Pal}{6EI}$ $\theta_C=-\frac{Pa}{6EI}(2l+3a)$	$f_C=-\frac{Pa^2}{3EI}(l+a)$
13		$v=-\frac{Mx}{6EIl}(x^2-l^2)$ $0\leqslant x\leqslant l$ $x=-\frac{M}{6EI}(3x^2-4xl+l^2)$ $l\leqslant x\leqslant(l+a)$	$\theta_A=-\frac{1}{2}\theta_B=\frac{Ml}{6EI}$ $\theta_C=-\frac{M}{3EI}(l+3a)$	$f_C=-\frac{Ma}{6EI}(2l+3a)$

【解】 边界条件为

$$v(0)=v(l)=M(0)=M(l)=0 \tag{1}$$

由例 8.5 已求得支座支力，则有

$$q(x)=\frac{Pb}{l}\delta(x)-P\,\delta(x-a)+\frac{Pa}{l}\delta(x-l)$$

$$Q(x)=\int q(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{Pb}{l}-P\cdot 1(x-a)$$

$$M(x)=\int Q(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{Pb}{l}x-P(x-a)\cdot 1(x-a) \tag{2}$$

再由挠曲线微分方程(8.28)式，得

$$EJv''(x)=\frac{Pb}{l}x-P(x-a)\cdot 1(x-a) \tag{3}$$

将上式积分两次，有

$$EJ\,\theta(x)=EJ\int v''(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2!}\left[\frac{Pb}{l}x^2-P(x-a)^2\cdot 1(x-a)\right]+C_1$$

$$EJv(x)=EJ\int\theta(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{3!}\left[\frac{Pb}{l}x^3-P(x-a)^3\cdot 1(x-a)\right]+C_1x+C_2 \tag{4}$$

由 $v(0)=v(l)=0$，可求得上式中的积分常数为

$$C_1=-\frac{1}{3!}\frac{Pb}{l}(l^2-b^2),\ C_2=0$$

代入(4)式，即得挠曲线方程为

$$v(x)=\frac{Pb}{6EJl}\left[x^3-(l^2-b^2)x-\frac{l}{b}(x-a)^3\cdot 1(x-a)\right]$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{Pbx}{6lEJ}(l^2-b^2-x^2), & (0\leqslant x\leqslant a)\\[2ex] -\dfrac{Pb}{6lEJ}\left[\dfrac{l}{b}(x-a)^3+(l^2-b^2)x-x^3\right], & (a\leqslant x\leqslant l)\end{cases}$$

例 8.9 用叠加法求梁的变形。桥式起重机的大梁如图 8-23 a 所示。梁的自重为均布载荷，集度为 q。作用于跨度中点的吊车为集中力

P。试求大梁跨度中点 C 的挠度 δ。

【解】由于挠曲线微分方程（8.28）或（8.29）是线性的，因此当梁上同时作用有几个载荷时，可用叠加法求解。

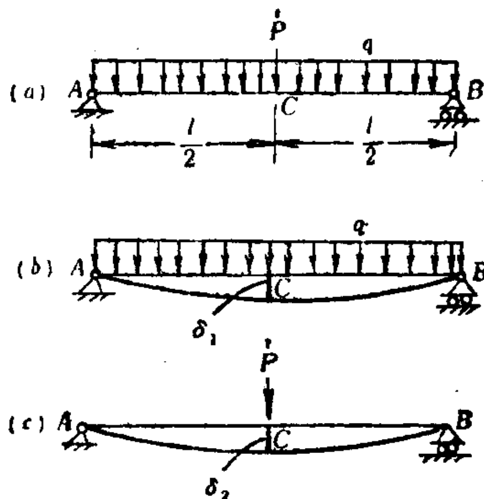


图 8-23

大梁的变形是由均布载荷 q 和集中力 P 共同引起的，设在均布载荷单独作用下（图8-23 b），梁中点 C 的挠度为 δ_1，由表 8.2 可查得

$$\delta_1 = -\frac{5\,ql^4}{384\,EI}$$

又设在集中力 P 单独作用下（图 8-23 c），梁中点 C 的挠度为 δ_2，由表 8.2 查得

$$\delta_2 = -\frac{Pl^3}{48\,EI}$$

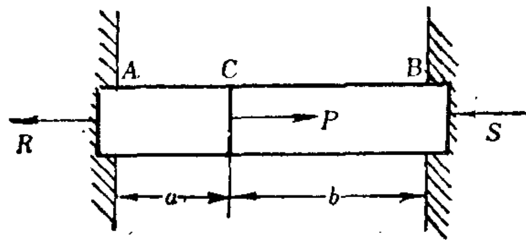
由叠加原理，在图示均布载荷和集中力的共同作用下，C 点的挠度为

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = -\frac{l^3}{48EI}\left(\frac{5}{8}ql + P\right)$$

习　题

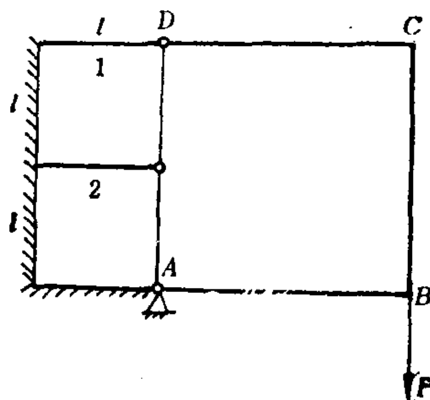
8-1　如图，刚性墙壁 AB 相距为 $(a+b)$，一杆固定在其间。力 P

作用在截面 C 处，试求墙壁 AB 的反力 R 和 S。



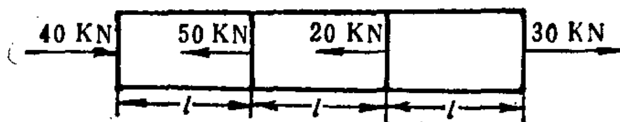
题 8-1 图

8-2 图示为一正方形刚体 $ABCD$，该刚体由铰链 A 和相同的两直杆 1、2固定在墙上。刚体在 B 点受铅垂载荷 P 作用。试求杆 1 和杆 2 的内力(轴力)。



题 8-2

8-3 图示均直杆的横截面积为 $F=4\ \text{cm}^2$，弹性模量 $E=2\times10^4\ \text{kN/cm}^2$。试画出该杆的轴力图，并求全杆的总变形。



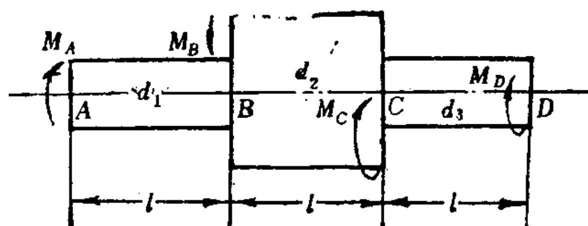
题 8-3 图

8-4　图示为阶梯形传动圆轴，已知各段直径为 $d_1 = d_3 = d_2/2 = 40$ mm，长度均为 800 mm，所受的外扭矩分别为 $M_A = M_D = 0.2\pi$ kN·m，$M_B = 1.48\pi$ kN·m，$M_C = 1.08\pi$ kN·m，$G = 80$ GPa ($1\,GPa = 10^9\,N/m^2$)

（1）画出该轴的扭矩图；

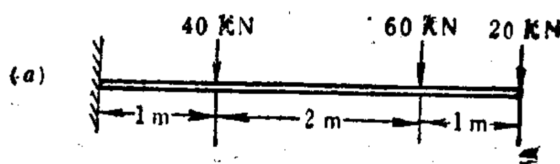
（2）求最大剪应力 τ_{max}；

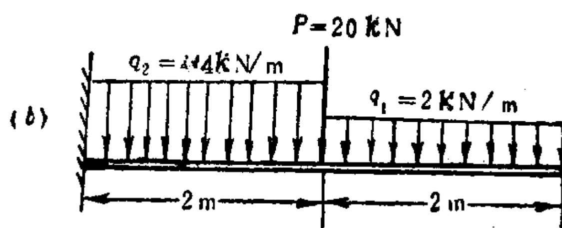
（3）求总扭转角。

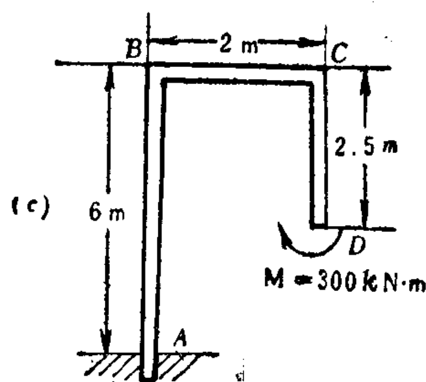


题 8-4 图

8-5　画出图示各梁的剪力和弯矩分布图。

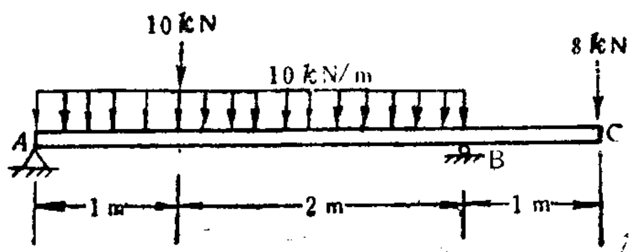






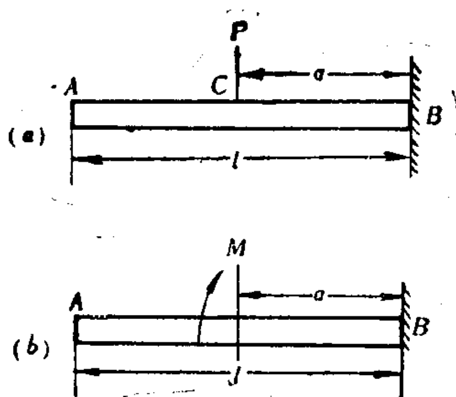
题 8-5 图

8-6　设梁的横截面为宽 14 cm、高 24 cm 的矩形，所受的载荷如图所示。求最大正应力的数值及其所在的位置。



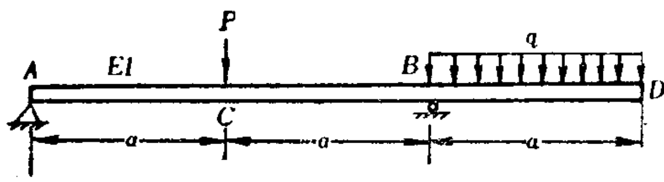
题 8-6 图

8-7　试求图示两悬臂梁在自由端处的转角和挠度。



题 8-7 图

8-8　一外伸梁及其载荷如图所示。已知 $P = qa$，试求梁上 C 点和 D 点处的挠度。



题 8-8图

第九章　弹性力学的基本方程

§9.1　平衡方程和应力分析

1. 应力矩阵和柯西公式

弹性力学中所要研究的一个基本问题，就是要了解物体内部的应力状况。由第七章所介绍的应力概念，我们知道，过物体内任一点 P 的某一截面 S 上的应力，是指 S 上过点 P 的面积微元上所受到的单位面积内力的极限。可见，应力不仅依赖于点 P 的位置，而且依赖于截面 S 的方向。由于过一点 P 的截面方向可以有无穷多个，因此在同一点处就可以有无穷多个应力矢量，这就使得分析物体在某点的应力状况成为一个看来很复杂的问题。为了克服这一困难，我们首先引进过点 P 的三个微小面积单元 ΔS_x、ΔS_y 及 ΔS_z，要求它们分别平行于某一坐标平面，即它们的法线分别平行于 x 轴、y 轴和 z 轴的正方向。我们来考察过点 P 且分别作用在 ΔS_x、ΔS_y 和 ΔS_z 上的三个应力矢量，对它们的各个分量分别给出以下的特殊记号：

	应力的方向		
	沿 x 轴	沿 y 轴	沿 z 轴
作用在 ΔS_x 面上	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}
作用在 ΔS_y 面上	τ_{yx}	σ_y	τ_{yz}
作用在 ΔS_z 面上	τ_{zx}	τ_{zy}	σ_z

其中 σ_x、σ_y 和 σ_z 称为正应力，它们的下标表示力的作用面的法线方向；τ_{ij} 则是与作用平面相切的应力，称为剪应力，其第一个下标 i 表示力的作用面的法线方向，第二个下标 j 则是该力自身的方向。

这九个特殊的应力分量构成一个张量，其矩阵形式是

$$[\sigma_{xyz}]=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{pmatrix} \tag{9.1}$$

上式称为在 P 点的**应力张量**或**应力矩阵**。下面我们将证明，利用它可以确定在 P 点附近任意截面上的应力，因此它是十分重要的。

我们考察图 9-1 所示的一个微小的四面体 $PABC$，它由过 P 点

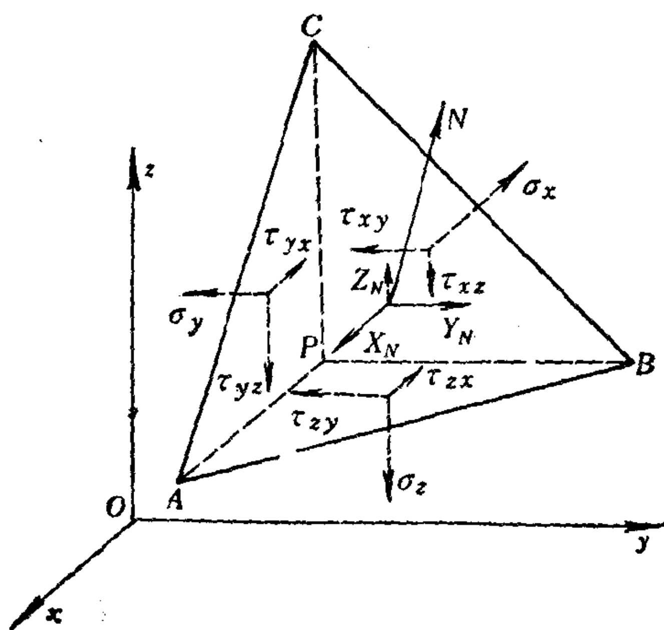


图 9-1

的三个平行于坐标平面的面以及一个斜面所组成。设斜截面 ABC 的面积为 ΔS，其外法线 N 的三个方向余弦分别用 l、m 和 n 表示。设此四面体的体积为 ΔV，当四面体无限减小而趋于 P 点时，平面 ABC上的应力就成为过 P 点的斜截面上的应力。

记斜截面 ABC 上的全应力为 $\boldsymbol{p}_N$，它在各坐标轴方向上的分量为 X_N、Y_N 和 Z_N。三个平行于坐标平面的面的面积分别为 $l\Delta S$、$m\Delta S$ 和 $n\Delta S$。当弹性体平衡时，该四面体自然也是平衡的，于是可列出力的平衡方程，例如沿 x 方向的平衡方程为

$$X_N\Delta S-\sigma_x l\Delta S-\tau_{yx}m\Delta S-\tau_{zx}n\Delta S+X\Delta V=0$$

其中 X 是 x 方向的体积力。由于当四面体无限缩小时，ΔV 是比 ΔS 更高阶的小量，故上式经化简后即得斜截面上的全应力在 x 方向上的

分量为

$$X_N = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \tag{9.2a}$$

同理可得

$$Y_N = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} \tag{9.2b}$$

$$Z_N = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \tag{9.2c}$$

(9.2) 各式是计算过已知点的斜截面上的全应力在各坐标轴上的分量的公式，称为**柯西公式**。

将斜截面上的这些应力分量再投影到该截面的法线方向，即可得到斜截面上的正应力 σ_N，即

$$\sigma_N = lX_N + mY_N + nZ_N \tag{9.3}$$

然后根据关系式 $\sigma_N^2 + \tau_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2$ 求得斜截面上的剪应力 τ_N 为

$$\tau_N = (X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2 - \sigma_N^2)^{1/2} \tag{9.4}$$

由于上述斜截面的方向(l, m, n)是任意的，这就说明过 P 点的任一斜截面上的全应力(用应力分量 X_N, Y_N, Z_N 表示)、正应力和剪应力都可以由公式(9.2)—(9.4)求得。因此，一点的应力矩阵 $[\sigma_{xyz}]$ 就完全确定了物体在该点附近的应力状况。

2. 平衡方程

从上所述可知，一点处的应力状态可用该点的应力矩阵或该点的九个应力分量 σ_x、τ_{xy} 等来描述。注意到应力分量 σ_x、τ_{xy} 等都是坐标 x、y、z 的函数，对于动力学问题它们还与时间有关。为了求得这些函数，我们首先要导出它们所满足的基本微分方程及边界条件(有时还要加上初始条件)。在弹性力学问题中常从静力学、几何学和物理学三方面来考虑问题，这一节就讨论静力学方面的基本微分方程——平衡方程。

如图 9-2 所示，在物体内的任意一点 P 附近，截取一个微小的平行六面体，它的各个表面分别平行于一个坐标平面，而棱边的长度为 $PA = \mathrm{d}x, PB = \mathrm{d}y, PC = \mathrm{d}z$。如前所述，应力分量是位置坐标的函数，因此，作用在这六面体两对面上的应力分量不尽相同。例如若某表面上的正应力为 σ_x，由于坐标的改变，作用在相距为 $\mathrm{d}x$ 的平行面上

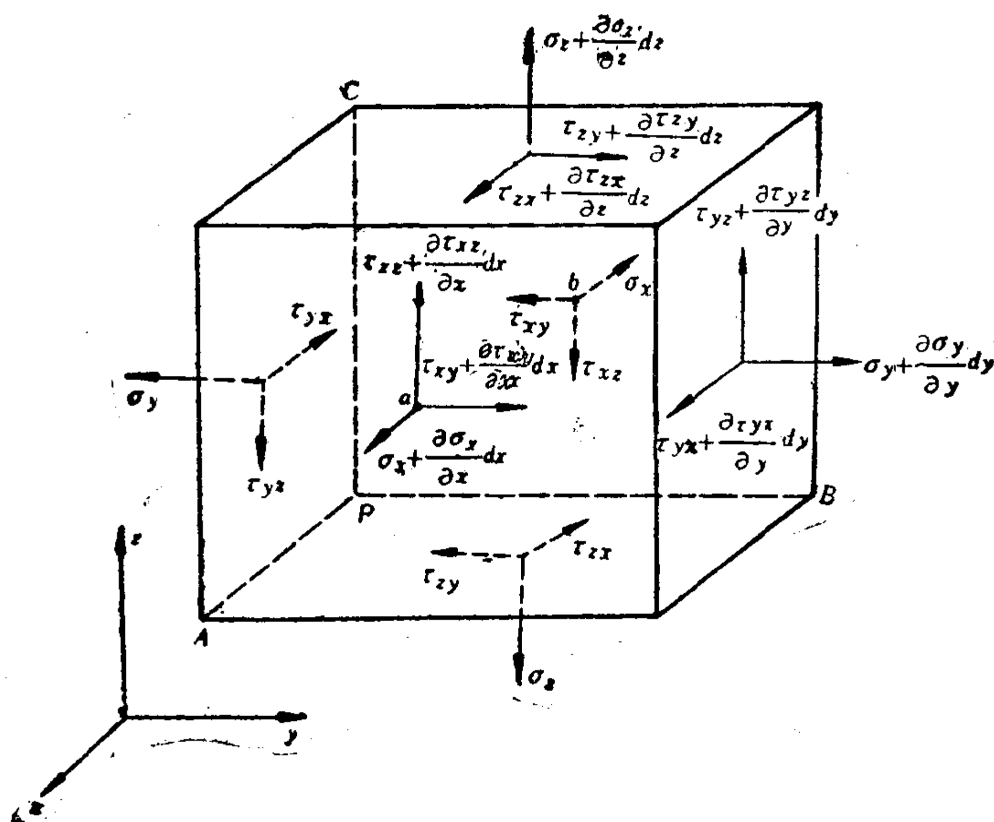


图 9-2

的正应力应当是 $\sigma_x+\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x$。按此类推便可得到图 9-2 所示的全部应力分量。在推导平衡方程的过程中，由于所取的六面体是微小的，因而可认为体力是均匀分布的。

首先，以连接六面体前后两面中心的直线 ab 为矩轴，由力矩平衡方程 $\Sigma M_{ab}=0$ 可得

$$\left(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}y}{2}+\tau_{yz}\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}y}{2}$$

$$-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}z}{2}-\tau_{zy}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}z}{2}$$

$$=0$$

经简化并略去高阶小量后得到

$$\tau_{yz}=\tau_{zy} \tag{9.5a}$$

同理可得到

$$\tau_{zx}=\tau_{xz}, \quad \tau_{xy}=\tau_{yx} \tag{9.5b}$$

这个结论称为**剪应力的互等性**，即作用在两个相互垂直的面上并且垂直于该两面交线的剪应力是互等的。

其次，以 x 轴为投影轴，由平衡条件 $\Sigma F_x=0$ 可得到

$$\begin{aligned}&\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\sigma_x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-\tau_{yx}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\&+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\tau_{zx}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&+X\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0\end{aligned}$$

由平衡方程 $\Sigma F_y=0$ 和 $\Sigma F_z=0$ 也可得出另外两个方程，其中 X、Y、Z 是作用在六面体内的体积力密度的分量。各式经化简后即得到弹性力学问题的**平衡方程**（又称为**纳维方程**）

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0\\[2ex]\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+Y=0\\[2ex]\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0\end{cases} \tag{9.6}$$

现在对公式(9.5)和(9.6)作一些说明。

公式(9.5)得出了剪应力互等的结论，由此可知(9.1)式所给出的应力矩阵是一个对称矩阵，也就是说其中只有六个独立的分量，这六个分量决定了物体内一点的应力状态。引入剪应力的互等性之后，柯西公式(9.2)和斜截面上的正应力公式(9.3)可分别改写为

$$\begin{pmatrix}X_N\\Y_N\\Z_N\end{pmatrix}=[\sigma_{xyz}]\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix} \tag{9.7}$$

$$\sigma_N=(l,m,n)\begin{pmatrix}X_N\\Y_N\\Z_N\end{pmatrix}=(l,m,n)[\sigma_{xyz}]\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix}$$

$$=l^2\sigma_x+m^2\sigma_y+n^2\sigma_z+2mn\tau_{yz}+2nl\tau_{zx}+2lm\tau_{xy} \qquad (9.8)$$

平衡方程(9.6)给出了三个静力学的方程式,但是连续体内应力分量却有六个。可见对于连续体,在每一点的邻域内,问题已是静不定的了。为了确定内力，还必须补充别的条件，即 9.2节 的 几 何 方程和 9.3 节的物理方程。

3. 主应力

如上所述,若我们已知一点处的应力矩阵,就可以根据 (9.2)式或(9.7)式求得任意斜截面上的应力。在工程上往往还需要知道,在一组载荷作用下，该点的哪一个方向的截面上将取得最大(最小)应力，以便据此进行强度校核。这就是所谓寻求主应力和主方向的问题。

设经过任一点 P 的某一斜面上的剪应力等于零,则该斜面上的正应力称为在点 P 的一个**主应力**;该斜面则称为点 P 的(应力)**主平面**。主平面的法线方向就称为点 P的一个(应力)**主方向**。下面将说明如何根据一点处的一组应力分量(或$[\sigma_{xyz}]$)来求出该点的主应力和主方向。

假设点 P 有一个应力主平面存在,它的法线的方向余弦为(l,m,n)。根据定义,主平面上的剪应力 τ_N 等于零,所以,该面上的全应力就等于正应力 σ，也就是主应力。主应力 σ 在三个坐标轴方向上的分量为

$$X_N=l\sigma,Y_N=m\sigma,Z_N=n\sigma \qquad (9.9)$$

将上式代入(9.2)式,可得

$$\left\{\begin{array}{l}(\sigma_x-\sigma)l+\tau_{xy}m+\tau_{zx}n=0\\ \tau_{xy}l+(\sigma_y-\sigma)m+\tau_{yz}n=0\\ \tau_{zx}l+\tau_{yz}m+(\sigma_z-\sigma)n=0\end{array}\right. \qquad (9.10)$$

待求的方向余弦满足

$$l^2+m^2+n^2=1 \qquad (9.11)$$

故它们不全为零,而(9.10)式具有非零解的充要条件是

$$\begin{vmatrix}\sigma_x-\sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_z-\sigma & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma\end{vmatrix}=0 \qquad (9.12)$$

将上式展开,得到关于 σ 的三次方程

$$\sigma^3-\Theta_1\sigma^2+\Theta_2\sigma-\Theta_3=0 \tag{9.13a}$$

其中

$$\begin{cases}\Theta_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z \\ \Theta_2=\begin{vmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{yz} & \sigma_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sigma_z & \tau_{zx}\\ \tau_{zx} & \sigma_x\end{vmatrix} \\ \Theta_3=\begin{vmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{vmatrix}\end{cases} \tag{9.13 b}$$

三次方程(9.13 a)称为该点应力状态的特征方程。它的三个实根就是所求的主应力 σ_1、σ_2 和 σ_3。将各主应力的值分别代回到 (9.10)式，并注意到(9.11)式，便可得到对应于σ_i的三组方向余弦(l_i,m_i,n_i)，($i=1,2,3$)。它们也就是欲求的三个应力主方向，即主应力 σ_i 所在平面的法线方向。由此可见，求一点处的主应力和主方向的问题实质上就是求该点处对称应力矩阵$[\sigma_{xyz}]$的特征值和特征向量。

由于主应力 σ_1、σ_2、σ_3 是方程(9.13 a)的根，则必成立

$$(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)(\sigma-\sigma_3)=0 \tag{9.14}$$

比较(9.13 a)和(9.14) 两式，可以看出该方程的根与系数之间有如下关系：

$$\begin{cases}\Theta_1=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 \\ \Theta_2=\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1 \\ \Theta_3=\sigma_1\sigma_2\sigma_3\end{cases} \tag{9.15}$$

限于篇幅，我们将一点处的应力状态即应力矩阵的一些重要性质不加证明地列举如下：

(1) 对称应力矩阵$[\sigma_{xyz}]$ 有三个实的特征值，与这些特征值对应的特征向量彼此正交。这就是说对于物体内的任一点都有三个实的主应力，它们对应的主平面互相垂直。

(2) 应力矩阵 $[\sigma_{xyz}]$ 可以经坐标变换化成对角阵，就是说如果把坐标系$O\ x'y'z'$ 的三根轴选得和三个主方向完全一致，那么应力矩阵就成为对角形

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{bmatrix}$$

此时的三根坐标轴亦称为**主轴**，主应力 σ_1、σ_2 和 σ_3 表征受力物体内一点处应力的物理状态，与坐标系的选择无关，它们是坐标旋转的不变量。由(9.15)式可见，特征方程(9.13 a)的系数 Θ_1、Θ_2 和 Θ_3 也是坐标旋转的不变量，特别，有

$$\Theta_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 \tag{9.16}$$

它表明受力物体内部一点在任意三个互相垂直的平面上的正应力之和是不变量，并且在数值上等于该点的三个主应力之和，Θ_1 也称为**体积应力**。

(3) 三个主应力中最大的一个就是该点各个方向上最大的正应力；主应力中最小的一个也就是该点所有正应力中最小的一个。最大剪应力在数值上等于最大主应力与最小主应力之差的一半，即如成立 $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$，则

$$\tau_{max}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3) \tag{9.17}$$

其作用平面与 σ_1 和 σ_3 对应的主平面相交成 45° 角。

例 9.1 已知物体某点的应力分量为 $\sigma_x=50\,a$，$\sigma_y=80\,a$，$\sigma_z=-70\,a$，$\tau_{xy}=-20\,a$，$\tau_{yz}=60\,a$，$\tau_{zx}=0$。试计算主应力值并求主方向。

【解】 先根据(9.13 b)式求出应力不变量

$\Theta_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=60\,a$

$\Theta_2=\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2=-9100\,a^2$

$\Theta_3=\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{zx}^2-\sigma_z\tau_{xy}^2=-432000\,a^2$

代入(9.13 a)式得到

$$\sigma^3-60\,a\sigma^2-9100\,a^2\sigma+432000\,a^3=0$$

解三次方程求得

$$\sigma_1=107.3\,a,\ \sigma_2=44.1\,a,\ \sigma_3=-91.4\,a$$

将求得的主应力依次代入(9.10)式，可得到三个特征向量为

$$N_1 = (0.314, -0.9, -0.303)^T$$
$$N_2 = (0.948, 0.282, 0.146)^T$$
$$N_3 = (-0.048, 0.337, -0.940)^T$$

上述特征向量已经满足(9.11)式，所以也就是所求的主方向。

§9.2 变形分析和几何方程

前面已说明过，弹性力学问题是一个静不定问题，单靠平衡方程是不能求解的，需要补充一些其他方程。本节中我们将给出几何方程，即弹性体在变形时位移和应变的相互关系。

1. 变形体内的位移场

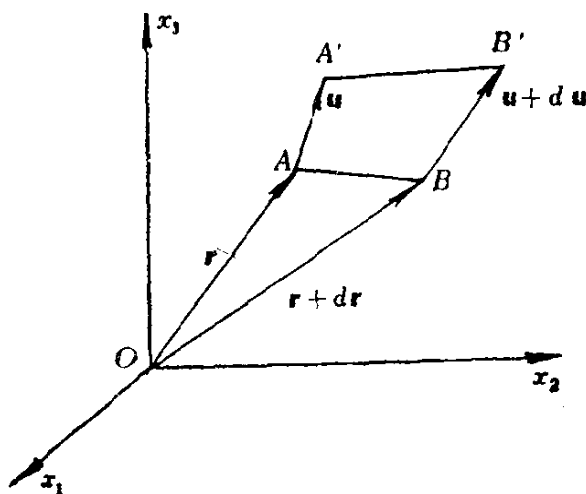


图 9-3

设 A、B 为变形体内无限接近的相邻两点，它们的矢径分别为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。由于物体的运动和变形，$A$、$B$ 两点分别移到 A' 和 B' 的位置。记 A 点的位移矢量为 $\boldsymbol{AA'}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$，$B$ 点的位移矢量为 $\boldsymbol{BB'}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r})$。根据弹性力学的基本假设，可知物体上各点的位移是各点坐标的连续可微函数，从而形成一个位移场。现在我们来研究任意相邻两点 A 和 B 位移间的关系，从而了解到连续介质位移场的特点。

为了方便起见，我们将位移 $\boldsymbol{u}$ 在直角坐标系中的三个分量分别记作 u_1、u_2 和 u_3，又将对应的直角坐标 x、y、z 改用 x_1、x_2 和 x_3 表示。首

先将B点的位移在A点附近作泰勒展开,略去高阶小量后得到

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\,\boldsymbol{r})=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\mathrm{d}\,x_i \tag{9.18}$$

因为$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\,\boldsymbol{r})=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})+\mathrm{d}\,\boldsymbol{u}$,故上式也可写成

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\mathrm{d}\,x_i \tag{9.19}$$

将(9.18)式在各坐标轴方向投影,则可得到

$$u_{jB}=u_{jA}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\mathrm{d}\,x_i \quad (j=1,2,3) \tag{9.20}$$

其中u_{jB}和u_{jA}分别表示B点和A点的位移在x_j方向上的分量。

现在设法将上式右端第二项写成“对称部分”与“反对称部分”之和,例如对x_1方向的位移分量有

$$\begin{aligned}
u_{1B}&=u_{1A}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\mathrm{d}\,x_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\mathrm{d}\,x_2+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\mathrm{d}\,x_3\\
&=u_{1A}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\mathrm{d}\,x_1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}\,x_3\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}\,x_2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}\,x_3\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}\,x_2
\end{aligned} \tag{9.21}$$

对$\boldsymbol{u}_B$在x_2和x_3方向的分量也可以作类似的分解。为了书写方便，引入记号

$$\begin{cases}
\varphi_1=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}-\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})_{x_1}\\
\varphi_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}-\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})_{x_2}\\
\varphi_3=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})_{x_3}
\end{cases} \tag{9.22}$$

以及

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_y = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_z = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \end{cases} \tag{9.23}$$

则(9.21)式可以写成

$$u_{1B} = u_{1A} + \varepsilon_x \mathrm{d}\, x_1 + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\mathrm{d}\, x_2 + \frac{1}{2}\gamma_{xz}\mathrm{d}\, x_3 + \varphi_2 \mathrm{d}\, x_3 - \varphi_3 \mathrm{d}\, x_2$$

同理可得

$$u_{2B} = u_{2A} + \frac{1}{2}\gamma_{yx}\mathrm{d}\, x_1 + \varepsilon_y \mathrm{d}\, x_2 + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\mathrm{d}\, x_3 + \varphi_3 \mathrm{d}\, x_1 - \varphi_1 \mathrm{d}\, x_3$$

$$u_{3B} = u_{3A} + \frac{1}{2}\gamma_{zx}\mathrm{d}\, x_1 + \frac{1}{2}\gamma_{zy}\mathrm{d}\, x_2 + \varepsilon_z \mathrm{d}\, x_3 + \varphi_1 \mathrm{d}\, x_2 - \varphi_2 \mathrm{d}\, x_1$$

记 $\{\mathrm{d}r\} = (\mathrm{d}\, x_1, \mathrm{d}\, x_2, \mathrm{d}\, x_3)^T$,综合上面三式可得到

$$\boldsymbol{u}_B = \boldsymbol{u}_A + [\Phi]\{\mathrm{d}\, r\} + [\varepsilon]\mathrm{d}\, \boldsymbol{r} \tag{9.24}$$

其中对称矩阵$[\varepsilon]$和反对称矩阵$[\Phi]$分别定义为

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{9.25}$$

$$[\Phi] = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.26}$$

若记 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ 则(9.24) 式中最后一项也可以写成 $\boldsymbol{\varphi} \times \mathrm{d}\, \boldsymbol{r}$, 显然,它表示微元 $\mathrm{d}\, \boldsymbol{r}$ 绕 A 点作无限小转动所引起的 B 点的位移。因此(9.24) 式右边的三项就包括了随 A 点的平行移动、绕 A 点的转动以及由纯变形所引起的位移。$\boldsymbol{u}_A + [\Phi]\{\mathrm{d}\, r\}$ 正是所谓的刚体位移。

(9.24)式右端第二项 $[\varepsilon]\{\mathrm{d}\, r\}$是由纯变形引起的位移,其中对称

矩阵 $[\varepsilon]$ 称为**应变矩阵**，也称**应变张量**。显然它的元素就是(9.23)所示的 A 点的线应变和剪应变，它们取决于 A 点附近的位移梯度。(9.23)式建立了各应变分量同位移分量的关系，常称为**几何方程**。

2. 变形体内一点的应变状态

前面我们从分析位移着手，导出了一点（记作 A）处与纯变形有关的应变矩阵（张量），应变矩阵中的六个应变分量可以完全确定该点的应变状态。所谓完全确定主要指以下三个方面：

(i) 过 A 点的任意方向的微小线段的相对伸长（正应变）；

(ii) 过 A 点的任意两微小线段间夹角的变化；

(iii) 过 A 点的微小正平行六面体体积的变化率或称体积应变。

现对上述三方面作简要的介绍。

(1) 设图 9-3 所示的 AB 为经过 A 点的、长度为 $\mathrm{d}r$ 的微小线段，其方向余弦为(l, m, n)。于是该线段在坐标轴上的投影为 $\mathrm{d}x_1 = l\,\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}x_2 = m\,\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}x_3 = n\,\mathrm{d}r$。设线段 AB 变形后移到 $A'B'$ 的位置，则 $\boldsymbol{OA'} = \boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{OB'} = \boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}+\mathrm{d}\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{A'B'} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{u}$。记线段 AB 的相对伸长为 ε_N，则成立

$$(A'B')^2 = (1+\varepsilon_N)^2\mathrm{d}r^2 = (\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{u})^2 \tag{9.27}$$

上式展开后得到

$$\varepsilon_N = \left(1+2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{(\mathrm{d}\boldsymbol{r})^2}+\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{u})^2}{(\mathrm{d}\boldsymbol{r})^2}\right)^{1/2}-1$$

对于小位移情况，$\mathrm{d}\boldsymbol{u} \ll \mathrm{d}\boldsymbol{r}$，记$\mathrm{d}r = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$，则上式可以简化为

$$\varepsilon_N = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{(\mathrm{d}r)^2} \tag{9.28}$$

将(9.19)式代入上式，即得

$$\varepsilon_N = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i}{(\mathrm{d}r)^2} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}r} \tag{9.29}$$

引入(9.23)式所示的应变分量的符号，即得线段 AB 的相对伸长为

$$\varepsilon_N = l^2\varepsilon_x + m^2\varepsilon_y + n^2\varepsilon_z + lm\gamma_{xy} + mn\gamma_{yz} + nl\gamma_{zx} \tag{9.30a}$$

或采用矩阵符号

$$\varepsilon_N = (l, m, n)[\varepsilon](l, m, n)^T \tag{9.30b}$$

可见过某点任意方向微线段的正应变可由该线段的方向余弦和该点的应变矩阵所确定。

(9.23)式给出的应变矩阵的各分量是在给定的坐标系中得出的，如果作适当的坐标旋转变换，可将此矩阵化为对角阵。此时所选的坐标轴称为应变主轴，相应于主轴的应变称为主应变，分别记作 ε_1、ε_2 和 ε_3。于是应变矩阵成为

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \tag{9.31}$$

此时(9.30 a)式可化简为

$$\varepsilon_N = l^2\varepsilon_1 + m^2\varepsilon_2 + n^2\varepsilon_3 \tag{9.32}$$

其中(l, m, n)已是线段微元在主轴系中的方向余弦。

(2) 设过 A 点有两条相交成 θ 角的微线段 AB 和 AC，如图 9-4 所示。AB 和 AC 的方向余弦分别为(l, m, n)和$(l_1, m_1 n_1)$，则成立

$$\cos\theta = ll_1 + mm_1 + nn_1 \tag{9.33}$$

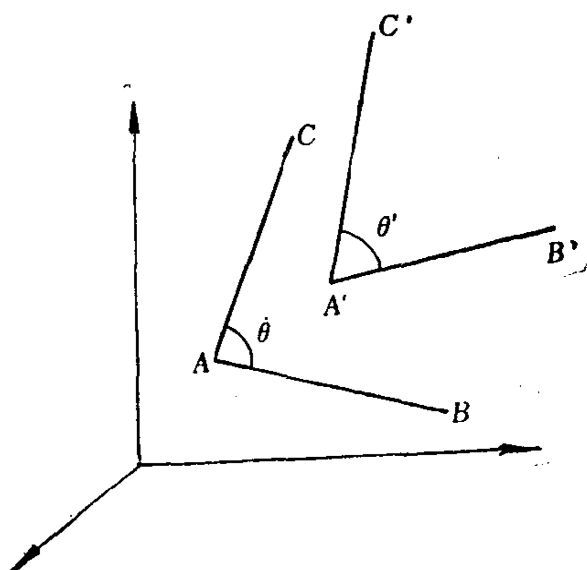


图 9-4

若发生变形后，该两线段分别移至 $A'B'$和 $A'C'$ 的位置，变形后的方向余弦分别为(l', m', n')和(l_1', m_1', n_1')，两者的交角为 θ'，则

$$\cos\theta' = l'l_1' + m'm_1' + n'n_1' \tag{9.34}$$

因此 $\theta'-\theta$ 就是所求的两线段的交角的变化。为此要写出线段在变形后的方向余弦。根据定义易知，变形后某线段的某一方向余弦等于该线元在对应方向上的投影除以线元(变形后)的长度。以 AB 线为例，已知 $AB=\mathrm{d}r, A'B'=(1+\varepsilon_N)\mathrm{d}r, \boldsymbol{A'B'}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{u}$,将(9.19)代入即得

$$l' = \frac{\mathrm{d}x_1 + \sum_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i}{(1+\varepsilon_N)\mathrm{d}r} = \left[l\left(1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + m\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + n\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right](1+\varepsilon_N)^{-1}$$

经展开并略去高阶项后有

$$l' = l\left(1-\varepsilon_N+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + m\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + n\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$$

同理得

$$\begin{cases} m' = l\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + m\left(1-\varepsilon_N+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + n\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ n' = l\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + m\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + n\left(1-\varepsilon_N+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \end{cases} \tag{9.35}$$

对线段 AC 作完全类似的推演，即可求得变形后线段 $A'C'$ 的方向余弦。再将结果代入(9.33)式和(9.34)式即可求得两线段的夹角的变化。具体的公式比较冗长，我们从略了。

(3) 现在我们来考虑 A 点的体积应变。所谓体积应变就是某点邻近的无限小体积的体积变化率。在变形体内某点沿其应变主轴方向各取长度为 $\mathrm{d}x_i(i=1,2,3)$ 的微元组成一个小立方体，该立方体的体积为 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$。在变形后，由于立方体各边都是主轴，只有正应变，所以体积为

$$\mathrm{d}V' = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$

略去高阶项后即得体积应变

$$e = \frac{\mathrm{d}V'-\mathrm{d}V}{\mathrm{d}V} = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 \tag{9.36}$$

可见，体积应变与坐标系的选取无关，它是一个坐标变换下的不变量。

3. 应变分量的协调性

我们已经知道变形体内任一点的应变状态可以用应变矩阵即六个应变分量来描述。这些分量可以用位移函数的偏导数表出，(9.23)式所示的几何方程就建立了位移与应变之间的关系。如果已知位移场，那么按(9.23)式即可计算偏导数从而求得应变分量。但是反过来，如果任意给出一组函数作为应变分量，要想通过积分求得位移。那就不一定有解。因为几何方程共有六个，而位移分量却只有三个，因此，一般是没有解的。

例如给出一组应变分量为： $\varepsilon_x=\frac{\partial u_1}{\partial x}=f(x,y)$， $\varepsilon_y=\frac{\partial u}{\partial y}=g(x,y)$， $\gamma_{xy}=\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial x}=h(x,y)$，其他分量均为零。如将 ε_x 对 y 微分两次，ε_y 对 x 微分两次。γ_{xy} 对 x 和 y 各微分一次，则得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}&=\frac{\partial^3 u_1}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 u_2}{\partial y\partial x^2}\\
&=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\gamma_{xy}
\end{aligned}
\tag{9.37}
$$

所以应当成立

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}$$

如果随意给出的 $f(x,y)$、$g(x,y)$ 和 $h(x,y)$ 不满足上述方程，那就说明这一组函数不能够作为应变分量。

(9.37)式是一个关于应变分量的协调方程。在直角坐标系下无限小应变分量的全部协调方程是

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^3\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}
\end{aligned}
\right.
\tag{9.38}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)\\
2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)\\
2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \lambda_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

这个方程称为**圣维南协调方程**，有时也称为**相容性方程**。它们常被用来检验由计算或测量所得的应变分量是否有误差，以及误差多大。

应变分量的协调性实际上保证了变形后物体的连续性条件不会遭到破坏。我们可以设想物体是由许多小的、相互光滑连接的平行六面体所组成。如果不满足应变协调性，那么变形后就得不到一个连续可微的位移场，换言之，原来相互间光滑地衔接在一起的小六面体就会断开或发生重叠。

§9.3 物理方程(广义虎克定律)

1. 广义虎克定律的第一种形式

物体作简单拉伸和剪切变形时，存在着描述应力-应变关系的虎克定律，即 $\sigma = E\varepsilon$ 和 $\tau = G\gamma$。我们知道物体在发生纵向应变时，同时存在横向应变，反之亦然，因此对于空间问题，应力-应变关系应由如下的**广义虎克定律**来描述：

$$
\left\{
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]\\
\gamma_{yz} &= \tau_{yz}/G\\
\gamma_{zx} &= \tau_{zx}/G\\
\gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G
\end{aligned}
\right. \tag{9.39}
$$

上式中 E 是弹性模量，G 是剪切弹性模量，μ 是泊松比，它们之间成立

关系式

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}$$

将(9.39)式中有关 ε 的三项相加，得到

$$\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) \tag{9.40}$$

注意到上式右端含有(9.16)式所示的不变量 Θ_1，即所谓的体积应力；而左端正是(9.36) 式所示的不变量，即体积应变 e。于是上式可以改写为

$$\Theta_1=\frac{E}{1-2\mu}e \tag{9.41}$$

它表明弹性体内一点处的体积应力和体积应变是成正比例的。因此，比例常数 $E/(1-2\mu)$就称为材料的**体积弹性模量**。

2. 广义虎克定律的第二种形式

广义虎克定律(9.39)式也可以改写为用应变来表出应力的形式，经运算得到

$$\left\{\begin{aligned}
\sigma_x&=\lambda e+\frac{E}{1+\mu}\varepsilon_x\\
\sigma_y&=\lambda e+\frac{E}{1+\mu}\varepsilon_y\\
\sigma_z&=\lambda e+\frac{E}{1+\mu}\varepsilon_z\\
\tau_{yz}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{yz}\\
\tau_{zx}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{zx}\\
\tau_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}
\end{aligned}\right. \tag{9.42}$$

其中常数 λ 为

$$\lambda=\frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \tag{9.43}$$

§9.4 弹性力学问题的提法

通常所说的要解某个弹性体力学问题，是指已知物体的形状、几何尺寸以及构成物体的材料的弹性常数，已知物体受约束的情况和所受到的外载荷（包括施加在表面的外力和分布在物体体积内的体力），要求确定物体内部的应力和位移并且将它们表示为物体内各点坐标的函数。例如某建筑物表面受到风载或静水压的作用，欲求其内部各处的应力。为了解决这类问题，我们常把物体表面的力或位移记成边界条件的形式，然后利用上面所得出的各组微分方程把边界信息扩展到物体内部。如果能找到满足所有微分方程和边界条件的解，就得到了整个物体内部的全部信息。

1. 弹性力学基本方程的矩阵形式。

下面将弹性体所满足的微分方程和边界条件用矩阵形式列举出来，以便讨论如何求解。

先引入下列符号：

体积力列阵　$\boldsymbol{F}=[X\quad Y\quad Z]^T$

表面力列阵　$\overline{\boldsymbol{F}}=[\overline{X}\quad \overline{Y}\quad \overline{Z}]^T$

位移列阵　$\boldsymbol{u}=[u\quad v\quad w]^T$

应力列阵　$\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{yz}\ \tau_{zx}\ \tau_{xy}]^T$

应变列阵　$\boldsymbol{\varepsilon}=[\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \gamma_{yz}\ \gamma_{zx}\ \gamma_{xy}]^T$

则弹性力学的基本方程(9.6)、(9.23)、(9.39)、(9.42)可以用矩阵形式列出如下：

平衡方程　$$[A]\sigma+\boldsymbol{F}=0 \tag{9.44}$$

几何方程　$$\varepsilon=[B]\boldsymbol{u} \tag{9.45}$$

物理方程　$$\varepsilon=[C]\sigma \tag{9.46}$$

或　$$\sigma=[D]\varepsilon \tag{9.47}$$

综合(9.47)和(9.45)两式，可得到应力与位移的关系式为

$$\sigma=[D][B]\boldsymbol{u} \tag{9.48}$$

其中各矩阵的定义分别为

$$[A]=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \tag{9.49}$$

$$[B]=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \tag{9.50}$$

$$[C]=\frac{1}{E}\begin{pmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{pmatrix} \tag{9.51}$$

$$[D]=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{pmatrix} 1 & \mu/(1-\mu) & \mu/(1-\mu) \\ \mu/(1-\mu) & 1 & \mu/(1-\mu) \\ \mu/(1-\mu) & \mu(1-\mu) & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\left.\begin{array}{ccc}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
\dfrac{(1-2\mu)}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\
0 & 0 & \dfrac{1-2\mu}{2(1-\mu)}
\end{array}\right] \tag{9.52}
$$

显然，矩阵$[D]$和$[C]$是互逆的。

上面列出的弹性力学的基本方程共十五个，其中有三个平衡方程、六个几何方程和六个物理方程。而未知函数也是十五个，即三个位移分量、六个应变分量和六个应力分量。方程和未知函数的个数是一致的。因此，方程是封闭的。

2. 边界问题

按照边界条件的不同，弹性力学问题分为位移边界问题、应力边界问题和混合边界问题。

在位移边界问题中，物体在全部边界上的位移分量是已知的，也就是说在边界面 S 上给出了坐标的已知函数 $\boldsymbol{u}^{*}=[u^{*},v^{*},w^{*}]^{T}$，且成立

$$
\boldsymbol{u}|_{S}=\boldsymbol{u}^{*} \tag{9.53}
$$

上式就是所谓的位移边界条件。

在应力边界问题中，物体在全部边界上所受的面力是已知的，也就是说，面力分量$\overline{\boldsymbol{F}}=[\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}]^{T}$ 的分量在边界 S 上的所有各点都是坐标的已知函数。设物体边界表面的法线的方向余弦为 (l,m,n)，将柯西公式(9.2)应用于边界上的一点，则 X_{N}、Y_{N} 及 Z_{N} 分别等于边界上的已知函数$\overline{X}$、$\overline{Y}$ 和 $\overline{Z}$，而 σ_{x}、σ_{y} 等均成为应力分量的边界值。于是应力边界条件可以写成：

$$
\begin{cases}
\overline{X}=l\sigma_{x}+m\tau_{xy}+n\tau_{zx} \\
\overline{Y}=l\tau_{xy}+m\sigma_{y}+n\tau_{yz} \\
\overline{Z}=l\tau_{zx}+m\tau_{yz}+n\sigma_{z}
\end{cases} \tag{9.54a}
$$

其矩阵形式为

$$\overline{\boldsymbol{F}}=[L]\boldsymbol{\sigma}_S \tag{9.54b}$$

(9.54 b)式中的 $\boldsymbol{\sigma}_S$ 表示应力的边界值，矩阵$[L]$ 由边界面的方向余弦构成，即

$$[L]=\begin{pmatrix} l & 0 & 0 & 0 & n & m \\ 0 & m & 0 & n & 0 & l \\ 0 & 0 & n & m & l & 0 \end{pmatrix} \tag{9.55}$$

当边界垂直于某一坐标轴时，应力边界条件将得到大大的简化：在垂直于 x 轴的边界上，即 x 为常量的边界上，$l=\pm 1$，$m=0$，应力边界条件为

$$\sigma_x=\pm\overline{X},\ \tau_{xy}=\pm\overline{Y},\ \tau_{zx}=\pm\overline{Z}$$

其余可类推。可见在这些特殊的情况下，应力分量的边界值在数值上等于对应的面力分量。

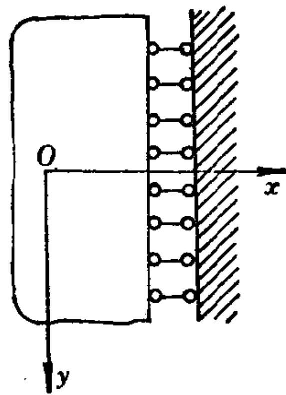


图 9-5

在混合边界问题中，已知物体一部分边界上的位移即已知其位移边界条件；而在另一部分边界上则已知其面力分布，即已知其应力边界条件。例如图 9-5 所示的连杆支承边就具有混合边界条件 $u_S=0$ 和 $(\tau_{xy})_S=0$。

3. 圣维南原理

在许多工程问题中， 在边界上常常难于给出精确的面力分布函数，而只能给出界面上面力的合力。比如说某杆件受集中力作用，施力体和杆件必须通过某种钩子或销钉连接，在连接处力的分布就是很复杂的。所谓集中力作用只是连接处分布力系的合力。为此，我们需要讨论在物体的边界上用等效力系来代替真实的分布力系对弹性力学问题解的影响。对于这个问题，**圣维南原理**可以提供很大的帮助，它可叙述如下：

如果把物体的一小部分边界上的面力变换成为分布不同但静力等效的面力，那么，近处的应力分布可能有显著的改变，但远处的应力分

布将改变很小，甚至可以忽略不计。

这里静力等效的条件是很重要的，它要求两个力系的主矢相同，对同一点的主矩也相同。例如图 9-6 的柱形杆件在两端面上虽然受到各种不同的分布力作用，但是都可以等效于最简单的集中力。各种不同的分布面力的作用，只影响到虚线所划出的部分区域，而远离端面的大部分区域内部的解都是相同的。根据圣维南原理我们就可以将边界条件化为等效的简单力系，这样做不会使弹性体内部的解产生明显的误差。

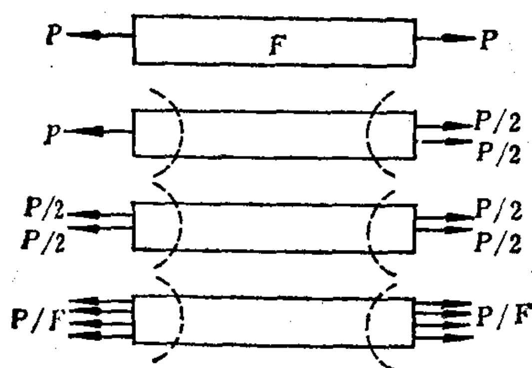


图 9-6

4. 弹性力学问题的求解方法

求解弹性力学问题有两种基本方法，一种是按位移求解，另一种是按应力求解。

按位移求解的方法就是取位移分量为基本的未知函数，也就是将关于应变和应力的微分方程及边界条件都化为用位移来表示的形式。为此可以将式(9.48)所示的应力与位移的关系 $\boldsymbol{\sigma}=[D][B]\boldsymbol{u}$ 代入平衡方程(9.44)，消去应力分量后就得到用位移分量 u、v、w 所表示的平衡方程，这个平衡方程称为**拉梅方程**，实质上，它就是包括静力平衡、几何方程和物理方程在内的综合方程。拉梅方程的最终形式是：

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial x}+\nabla^2 u\right)+X=0\\&\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial y}+\nabla^2 v\right)+Y=0\\&\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial z}+\nabla^2 w\right)+Z=0\end{aligned}\right. \tag{9.56}$$

其中 $e=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$是体积应变，算子$\nabla$为

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

将边界条件也写成用位移表示的形式，从拉梅方程解得位移的函数表达式后，就可以从几何方程求得各应变分量，再从物理方程得到应力，于是该弹性力学问题就解决了。

下面再介绍按应力求解时所得到的微分方程。显然，我们将设法使弹性力学的基本方程都用应力来表示。为此需从几何方程中消去位移分量，得到应变分量之间的关系，再将物理方程代入使其只含有应力分量。这样得出的方程相当于用应力分量表示的关于变形协调的关系式，称为**密切尔相容方程**。由于推导过程比较冗长，我们仅将其结果列出。

记 $\Theta=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$ 为体积应力，则应力相容方程(亦称为应力协调方程)为

$$\left\{\begin{aligned}
&(1+\mu)\nabla^2\sigma_x+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}=-\frac{1+\mu}{1-\mu}\left[(2-\mu)\frac{\partial X}{\partial x}+\mu\frac{\partial Y}{\partial y}+\mu\frac{\partial Z}{\partial z}\right]\\
&(1+\mu)\nabla^2\sigma_y+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}=-\frac{1+\mu}{1-\mu}\left[(2-\mu)\frac{\partial Y}{\partial y}+\mu\frac{\partial Z}{\partial z}+\mu\frac{\partial X}{\partial x}\right]\\
&(1+\mu)\nabla^2\sigma_z+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=-\frac{1+\mu}{1-\mu}\left[(2-\mu)\frac{\partial Z}{\partial z}+\mu\frac{\partial X}{\partial x}+\mu\frac{\partial Y}{\partial y}\right]\\
&(1+\mu)\nabla^2\tau_{yz}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z}=-(1+\mu)\left(\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\\
&(1+\mu)\nabla^2\tau_{zx}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z\partial x}=-(1+\mu)\left(\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\\
&(1+\mu)\nabla^2\tau_{xy}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y}=-(1+\mu)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right. \tag{9.57}$$

在体力为零或为常量的情况下，上述协调方程简化为

$$\begin{cases}(1+\mu)\nabla^2\sigma_x+\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}=0\\(1+\mu)\nabla^2\sigma_y+\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}=0\\(1+\mu)\nabla^2\sigma_z+\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=0\\(1+\mu)\nabla^2\tau_{yz}+\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z}=0\\(1+\mu)\nabla^2\tau_{zx}+\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial z\partial x}=0\\(1+\mu)\nabla^2\tau_{xy}+\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y}=0\end{cases}\tag{9.58}$$

按应力求解问题时，应力分量应当满足上述协调方程和平衡方程，并在边界上满足应力边界条件(9.54)式。由于位移边界条件不容易用应力分量表示，因此位移边界问题和混合边界问题一般都不能按应力求解。

求得应力分量后，再代入广义虎克定律就得到各应变分量，再根据几何方程将应变分量积分就得到位移分量，其中的积分常数由物体的约束条件确定。

§9.5 弹性力学的平面问题

从上一节的内容可见，弹性力学问题的方程比较复杂，在任意边界条件下，求解一般的弹性力学问题是很困难的。在工程技术中，常常可以根据具体问题的特点，建立简化模型，使之易于求解。平面问题就是应用最广泛的一种简化模型。这一节我们将介绍两种平面问题及其求解方法。

1．平面应变状态

如果一个物体在某一方向(不妨设为 z 方向)的位移分量 w 处处为零，其余两方向的位移均与 z 坐标无关，那么我们就称此物体处于只与

有关的**平面应变状态**。

假设有一个很长的柱形物体，其横截面处处相同；所有的载荷都垂直于该物体的轴线（z 方向）且其分布规律不随坐标 z 而变化；物体的约束条件也与坐标 z 无关。因此，除了两端面附近外，可以认为物体处于平面应变状态。图 9-7 所示的水坝和隧道都是平面应变状态的例子。

对于平面应变状态应该成立

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial z}=0, \quad w=0 \tag{9.59}$$

将上式代入几何方程，可知应变分量应为

$$\left\{\begin{array}{l}\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}=f(x,y), \ \varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y}=f_2(x,y) \\ \gamma_{xy}=\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=f_3(x,y) \\ \varepsilon_z=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0\end{array}\right. \tag{9.60}$$

由此可见，变形都发生在垂直于 z 轴的 xy 平面内，而且每一个这样的平面都可以看作是对称面。要注意的是此时沿 z 轴方向的正应力并不为零。将（9.60）式的应变关系式代入物理方程，可解出与坐标 z 无关的应力

$$\sigma_x; \ \sigma_y; \ \sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y); \ \tau_{xy}$$

而剪应力分量 τ_{yz} 和 τ_{zx} 都等于零。

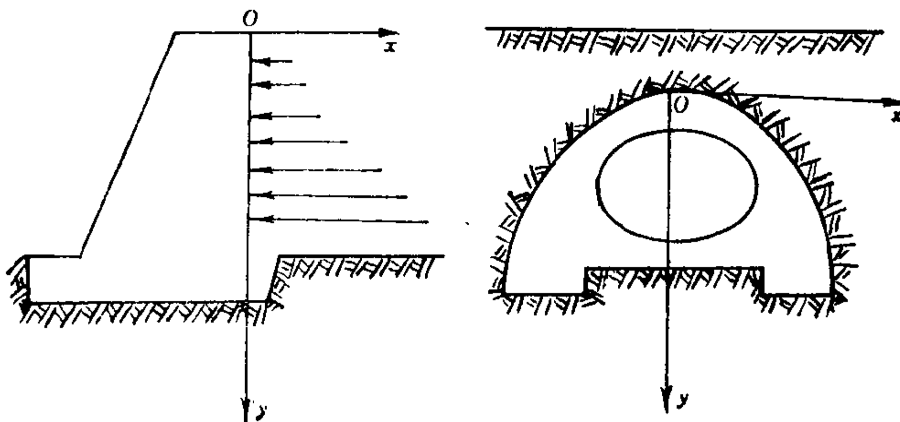


图 9-7

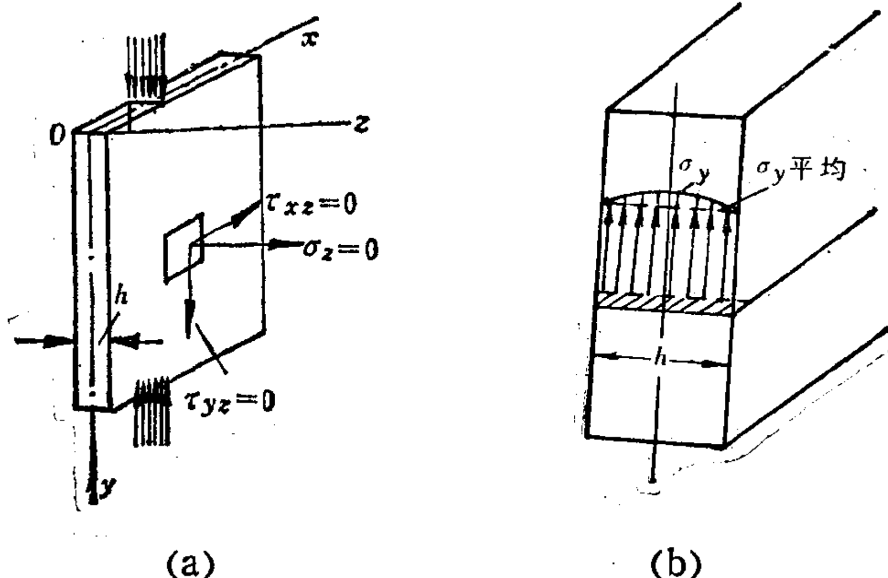
2．平面应力状态

平面应力状态是指某一方向（例如 z 轴）的应力分量处处为零而其他的应力分量均与坐标 z 无关的情况，即成立

$$\begin{cases} \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_x = f_1(x,y), \sigma_y = f_2(x,y), \tau_{xy} = f_3(x,y) \end{cases} \tag{9.61}$$

工程上常用的等厚度薄板，当其只承受作用在板周且与薄板平面平行的载荷时就可认为是平面应力状态。

考察图 9-8 a 所示的薄板，其厚度 h 比板的其他尺寸小得多，作一



(a)　　　　　　(b)

图 9-8

平面平分薄板的厚度，这个平面称之为薄板的中面。把坐标原点和 x 轴及 y 轴都放在中面内，z 轴的方向垂直于中面。另外，施于周界上的载荷沿厚度 z 方向不变，体积力亦与厚度无关并垂直于 z 轴。在这些条件下，因为板面上（$z=\pm h/2$）不受力，所以在板面上成立：

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

由于板很薄，外力又不沿厚度变化，所以可以认为上式在薄板内所有各点都成立。这样只剩下 σ_x、σ_y 和 τ_{xy} 三个应力分量，故称为**平面应力问题**。这三个非零应力分量可能沿薄板的厚度方向稍有变化，如图 9-8b 所示。但是，仍因为板很薄，沿厚度方向的变化也不会很大，因此，我们可以取它们的平均值来表示。在以后的论述中，应力分量 σ_x、σ_y 和

τ_{xy} 都是表示不随厚度变化的平均值。显然，它们只是 x 和 y 的函数，即

$$\sigma_x=\varphi_1(x,y),\sigma_y=\varphi_2(x,y),\tau_{xy}=\varphi_3(x,y)$$

薄板变形后，其中面将不会发生翘曲。但是，由于平行于中面的各应力在板的不同点处具有不同的数值，因而薄板的横向尺寸将有不同的变化。可见在平面应力状态下，虽然 σ_z 处处为零，但是应变分量 ε_z 并不都等于零。

3. 平面问题的基本方程

不论是平面应变或是平面应力问题，由于引进的假设使未知函数简化为八个，即应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy}；应变分量 ε_x、ε_y、γ_{xy} 和位移分量 u、v。它们所满足的基本方程也有八个，即

平衡方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0\\[2mm]\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0\end{cases}\tag{9.62}$$

几何方程

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\ \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\tag{9.63}$$

（协调方程）

$$\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$$

对于平面应力状态，物理方程为

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\\[2mm]\varepsilon_y=\dfrac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)\\[2mm]\gamma_{xy}=\dfrac{1}{G}\tau_{xy}\end{cases}\tag{9.64}$$

对于平面应变状态，由于 $\varepsilon_z=0$ 可得 $\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y)$，将此关系代入广义虎克定律后得到

$$
\begin{cases}
\varepsilon_x = \dfrac{1-\mu^2}{E}\left[\sigma_x - \dfrac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right] \\
\varepsilon_y = \dfrac{1-\mu^2}{E}\left[\sigma_y - \dfrac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right] \\
\gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy}
\end{cases}
\tag{9.65}
$$

若设 $E_1 = E/(1-\mu^2)$，$\mu_1 = \mu/(1-\mu)$，则平面应变状态的物理方程为

$$
\varepsilon_x = \frac{1}{E_1}(\sigma_x - \mu_1\sigma_y)
$$

$$
\varepsilon_y = \frac{1}{E_1}(\sigma_y - \mu_1\sigma_x)
$$

$$
\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}
$$

可见它与平面应力状态下的物理方程有完全相同的形式。据此可知，只要将弹性常数 E 和 μ 作适当的变换，求解平面应力问题的方法就可以完全同样地用于平面应变问题。以下我们只需讨论平面应力问题的解法。

4. 艾雷应力函数

现在介绍一种利用所谓应力函数来求解平面应力问题的方法。

我们从寻求满足平衡方程的应力着手，先假定体力为零，则平衡方程(9.62)成为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\
\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0
\end{cases}
\tag{9.66}
$$

不难证明，若有函数 $\Phi(x,y)$，使得

$$
\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \sigma_x,\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \sigma_y,\quad -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = \tau_{xy}
\tag{9.67}
$$

那么方程(9.66)将恒等地满足。这样，问题就变为要寻找一个满足应力协调方程和边界条件的函数 Φ。将应力协调方程(9.58)的前两式相加，对于平面应力问题，有 $\Theta = \sigma_x + \sigma_y$，于是可得应力协调方程为

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0 \tag{9.68}$$

亦即

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0$$

将(9.67)式代入(9.68)式，即得到函数 Φ 应满足的方程为

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=0 \tag{9.69}$$

于是可以作出结论：一个满足方程(9.69)的任意函数 $\Phi(x, y)$ 能够按照（9.67）式的形式，形成自动满足平衡方程和协调方程的应力系统 σ_x、σ_y 和 τ_{xy}。这个方法是英国天文学家艾雷提出的，所以将函数 $\Phi(x,y)$ 称为**艾雷应力函数**。

方程(9.69)是所谓双调和方程或重调和方程，于是体力为零时的平面问题就化为求解与双调和方程相联系的边值问题。

若物体受到的体力不等于零而是常量时，则应力函数仍然存在.此时，应力协调方程仍然是(9.68)式的形式，应力分量则要求满足(9.62)式所示的非齐次方程。它的解可由两部分叠加而成，即非齐次方程的任意一个特解及相应齐次微分方程（9.66）的通解。后者的通解已经由(9.67)式给出，非齐次方程的特解则可以取为：

$$\begin{cases}\sigma_x=-Xx,\sigma_y=-Yy,\tau_{xy}=0\\ \text{或}\\ \sigma_x=0,\sigma_y=0,\tau_{xy}=-Xy-Yx\\ \text{或}\\ \sigma_x=-Xx-Yy,\sigma_y=-Xx-Yy,\tau_{xy}=0\end{cases} \tag{9.70}$$

等形式，它们都能满足平衡方程(9.62)。

将通解(9.67)与任一组特解相加，就得到微分方程(9.62)的全解，例如取第一组特解可得

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-Xx,\quad \sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-Yy,\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \tag{9.71}$$

不论 Φ 是什么函数，总能满足平衡方程。将(9.71)式的应力分量代入应力协调方程(9.68)得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}-Xx+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}-Yy\right)=0$$

由于体力 X 和 Y 是常量，上式可以化简为

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4}=0$$

我们仍然得到了任意函数 $\Phi(x, y)$ 应当满足双调和方程的结论。由此可见，如果在双调和方程的无穷多解中选得一个应力函数 Φ，使得将 Φ 代入(9.71)式后求出的应力分量能满足应力边界条件，则就得到了所需的平面应力问题(常体力)的解。

下面将举例说明各种不同形式的应力函数所对应的平面问题。

我们取应力函数为多项式形式。例如 $\Phi=\frac{a}{2}x^2+bxy+\frac{c}{2}y^2$，在不计体力的情况下由(9.67)式可得到 $\sigma_x=c, \sigma_y=a, \tau_{xy}=-b$。可见二次多项式的应力函数对应于均匀应力状态。它所对应的力学问题是沿 x 轴或 y 轴的简单拉伸。在 xy 平面的纯剪以及它们的组合。

例 9.2 已知 $\Phi=Axy^3$ 是图 9-9 a 所示矩形薄板的应力函数，试求 Φ 对应的应力分量和它代表的边界应力分布(设体力为零)。

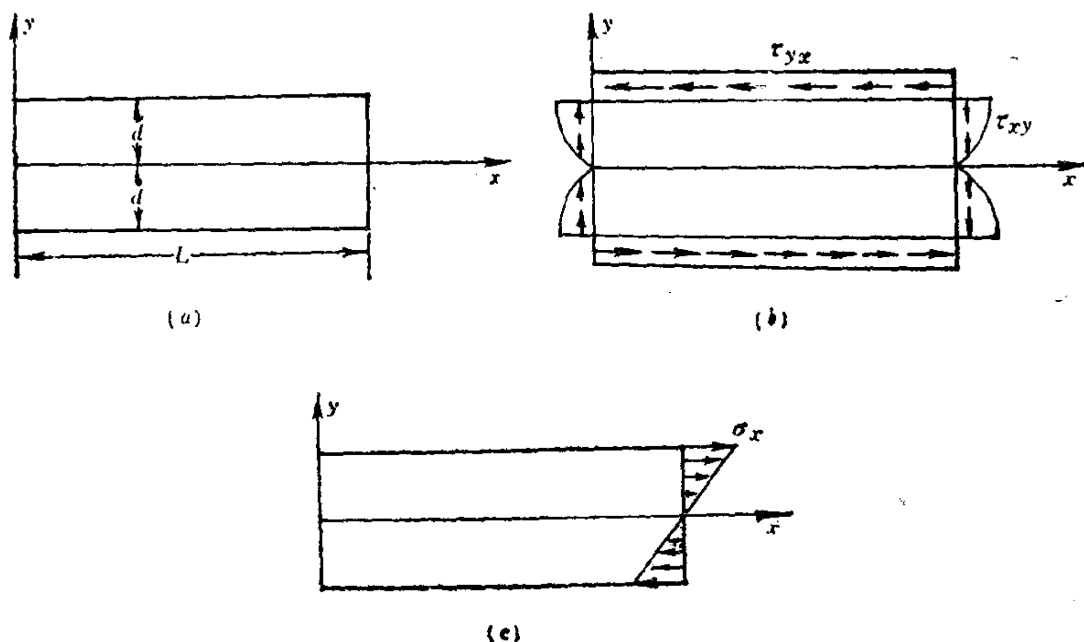


图 9-9

【解】 已知应力函数，则由(9.67)式可得应力分量为

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=6Axy,\quad \sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=0,\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=-3Ay^2$$

这个应力状态在边界面上也是适用的。即

在 $y=\pm d$： $\tau_{xy}=-3Ad^2$(图 b) 有均布剪应力。

在 $x=0$： $\tau_{xy}=-3Ay^2$(图 b) 有抛物线分布的剪应力。

在 $x=L$： $\tau_{xy}=-3Ay^2, \sigma_x=6ALy$(图 b、c)，有按抛物线分布的剪应力和呈线性分布的正应力。即

这些边界上的剪应力和正应力都能产生对板的力偶矩，剪应力产生的力偶矩为

$$M_1=6Ad^3L-L\int_{-d}^{d}3Ay^2\mathrm{d}y=4Ad^3L$$

在边界 $x=L$ 上的正应力所产生的弯矩为

$$M_2=-\int_{-d}^{d}6ALy^2\mathrm{d}y=-4ALd^3$$

总的力偶矩为$M_1+M_2=0$，即矩形板边界上的外力构成一平衡力系。

例 9.3 已知函数 $\Phi=A(x^3+xy^2)$，试问：

(1) 对于图 9-10 所示厚度为 1的正方形平板，Φ 能否作为应力函数？(2) 求不计体力时的应力分量。(3) 计算边界上的面力并作图表示。

【解】 (1) $\Phi=A(x^3+xy^2)$是三次函数，必能满足 $\nabla^4\Phi=0$，所以可作为应力函数。

(2) $$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=2Ax \qquad \sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=6Ax$$

$$\tau_{xy}=\frac{-\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=-2Ay$$

因此应力矩阵为

$$[\sigma_{xy}]=\begin{bmatrix}2Ax & -2Ay\\ -2Ay & 6Ax\end{bmatrix}$$

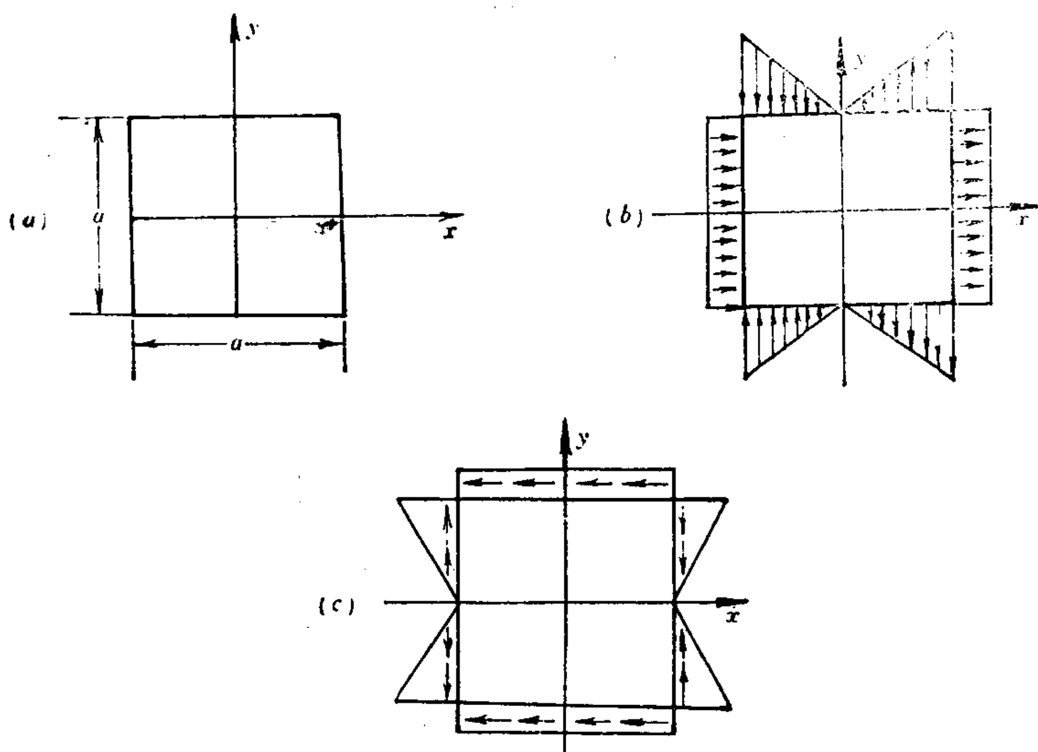


图 9-10

(3) 对于平面应力问题，$\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{xz}=0$，(9.54)式简化为

$$\begin{bmatrix}\overline{X}\\\overline{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\\tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l\\m\end{bmatrix}$$

其中(l,m)是边界面法线的方向余弦。

在 $y=\dfrac{a}{2}$处，$\begin{bmatrix}\overline{X}\\\overline{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2Ax & -2Ay\\-2Ay & 6Ax\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-2Ay\\6Ax\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-Aa\\6ax\end{bmatrix}$$

$y=-a/2$ 处，$\begin{bmatrix}\overline{X}\\\overline{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2Ax & -2Ay\\-2Ay & 6Ax\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}+2Ay\\-6Ax\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-Aa\\-6ax\end{bmatrix}$$

同理可知在 $x=\pm a/2$ 处，有 $l=\pm1, m=0$，于是可得

在 $x=\pm a/2$ 处，$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aa \\ \mp 2Ay \end{bmatrix}$

例 9.3 图的 b 和 c 分别显示了边界上的正应力和剪应力的分布情况。其中各应力分量都是坐标的线性函数，这是三次多项式的应力函数的特点。

5．实例介绍——三角形截面的重力坝计算

我们已经将平面问题的求解(按应力求解)归结为寻找应力函数，并使其在物体内部满足双调和方程，在边界上满足边界条件。寻求应力函数有各种方法，如复变函数方法和逆解法等。这里用半逆解法来计算一个实际例子。通过这个例子可以对弹性力学平面问题求解的全过程有一个初步的了解。

所谓半逆解法是针对所要解决的问题，先假定应力函数的某种解析形式，但是保留某些待定系数，再代入双调和方程和应力边界条件来确定这些系数。如果所假定的解析形式无法满足双调和方程和边界条件，那么就需另行修改或补充应力函数的形式。

图 9-11 是一个混凝土重力坝的横截面，承受水压力的左边界 OA 是铅直的，右边界 OB 是与铅垂线倾斜成 β 角的直线，如图 9-11 所

图 9-11

示，建立直角坐标系。

重力坝沿着坝长可能有不同的截面，但由于坝体很长，沿着坝长，坝身被伸缩缝分成许多段。在每一段的范围内可认为坝的截面是不变的，计算时作为平面应变问题来考虑。

坝所受到的载荷有两种：一种是从顶点 O 开始按线性分布的静水压强（水的比重为 γ），这是面力；另一种是坝身的自重，看作是均匀分布的体积力，单位体积的重量记作 p。

$$\text{边界条件为}\quad \begin{cases} \sigma_x = -\gamma y, \tau_{xy} = 0, & OA\ \text{边}(x=0)\text{成立} \\ \overline{X} = \overline{Y} = 0, & OB\ \text{边}(x = y\,\mathrm{tg}\,\beta)\text{成立} \end{cases} \tag{9.72}$$

现在来选定应力函数。根据线性分布的表面水压，我们设想应力函数为三次多项式：

$$\Phi(x,y) = \frac{d}{6}x^3 + \frac{e}{2}x^2y + \frac{f}{2}xy^2 + \frac{k}{6}y^3 \tag{9.73}$$

其中包括四个待定系数 d、e、f、k，边界条件也有四个。选择式(9.70)的第二式所示的特解，可以写出应力分量的表达式为

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = fx + ky, \sigma_y = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = dx + ey \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - px = -ex - fy - px \end{cases} \tag{9.74}$$

假定的应力函数是自然满足双调和方程的，因此只需通过代入边界条件来确定待定常数，比较(9.72)和(9.74)两式，得到

在 $x=0$ 处：$\sigma_x = ky = -\gamma y$　可得 $k = -\gamma$

$\tau_{xy} = -fy = 0$　可得 $f = 0$

于是(9.74)式的应力分量可以改写为

$$\sigma_x = -\gamma y, \quad \sigma_y = dx + ey, \quad \tau_{xy} = -(p+e)x$$

为了确定 d 和 e，需要利用边界 OB 上的条件。根据应力边界条件可知，在 OB 面上成立

$$\begin{bmatrix} -\gamma y & -(e+p)x \\ -(e+p)x & dx+ey \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta \\ -\sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

经简单运算后，求得 $e = \gamma/\mathrm{tg}^2\beta - p$，$d = p\,\mathrm{ctg}\,\beta - 2\gamma\,\mathrm{ctg}^3\beta$。因此，

应力函数中的系数已全部确定。应力分量表示成坐标的函数，为

$$\sigma_x = -\gamma y$$
$$\sigma_y = (p\operatorname{ctg}\beta - 2\gamma\operatorname{ctg}^3\beta)x + (\gamma\operatorname{ctg}^2\beta - p)y$$
$$\tau_{xy} = -\gamma\operatorname{ctg}^2\beta\cdot x$$

根据得出的结果可以考察坝内各处的应力。例如在左边界上$y=y_0$处，应力为$\sigma_y=(\gamma\operatorname{ctg}^2\beta-p)y_0$。容易看出，如果体力$p$小于$\gamma\operatorname{ctg}^2\beta$，则$\sigma_y$为正值，也就是坝面受到拉伸的情形，而这在工程上是不能容许的。工程师们可以以上述计算结果为依据，选择适当的截面（改变β角），以避免出现坝体受拉的情形。

根据求出的应力分量函数，还可以求出坝内任一点处的主应力和主平面的方向，得知最大压应力（即最小一个主应力）出现的方向，供设计师们在布置块石堆砌或混凝土块接缝时参考。

需要指出的是，以上解答只能在一定范围内使用。例如在底部，因为坝与地基相连，受到地基的约束，因此在底部附近，以上的解答是不精确的。此外，坝顶总有一定的宽度而不会是一个尖顶，因此在坝顶处，上述解答也不适用。

关于重力坝的精确的应力分析，可以用有限单元法。

习　　题

9-1 已知物体某点的应力分量为

$$\sigma_x=\sigma_1,\sigma_y=\sigma_2,\sigma_z=\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$$

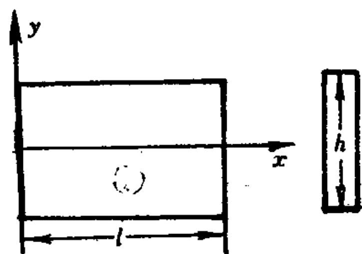
试求与xy平面垂直的任意斜截面上的正应力和剪应力。

9-2 在物体中的某一点，所有的正应力分量都为零，即$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=0$，其余三个剪应力分量中的一个为零（如$\tau_{xy}=0$），试求该点的主应力。

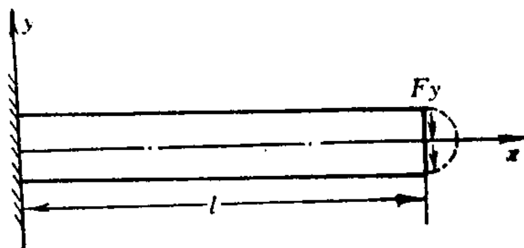
9-3 物体中某点的应力分量为$\sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=0,\sigma_z=200\,a$，$\tau_{yz}=\tau_{zx}=100\,a$，试求该点的主应力。

9-4 如图所示，已知矩形板的应力分量为$\sigma_x=q_{xy}$，$\sigma_y=0$，$\tau_{xy}=c\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$，试根据平衡方程求出系数$c$，并在$x=l$截面上画出正

应力和剪应力的分布图(不考虑体力)。



题 9-4 图



题 9-5 图

9-5 如图所示,有一矩形截面的梁，由于自由端受到力 P 的作用而发生横向弯曲，力 P 的分布规律满足 $F_y=-\frac{P}{2I}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$。现按材料力学方法求得应力分量为

$$\tau_{xz}=\tau_{yz}=\sigma_y=\sigma_z=0,\ \sigma_x=\frac{P(l-x)}{I}y,\ \tau_{xy}=-\frac{P}{2I}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

试检查该应力分量是否满足平衡方程和边界条件。其中 h 是横截面的高度,I 是横截面的惯矩。

9-6 已知位移分量为

$$u=\frac{z^2+\mu(x^2-y^2)}{2a},v=\frac{\mu xy}{a},\ w=-\frac{xz}{a}$$

式中 a 是常数。试求应变分量，并指出它们能否满足变形协调条件。

9-7 试证明无应变状态($\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=\gamma_{xy}=0$) 所对应的位移是刚体位移。

9-8 将某一小物体放入高压容器内,在静水压力 $p=0.45\,\mathrm{N/mm^2}$ 的作用下，测得体积应变 $e=\frac{\Delta V}{V}=-3.6\times10^{-5}$,若构成该物体的材料的泊松比 $\mu=0.3$,试求其弹性模量 E。

9-9 如图所示,已知矩形薄板的长度为 l,高度为 h,厚度为 1。试问下列函数能否作为它的应力函数？若能，写出不计体力的应力分量和边界上的面力,并将面力画在薄板的边界上。

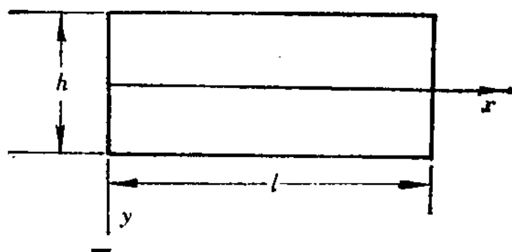
(1) $\Phi=a+bx+cy$;

(2) $\Phi=ax^2$;

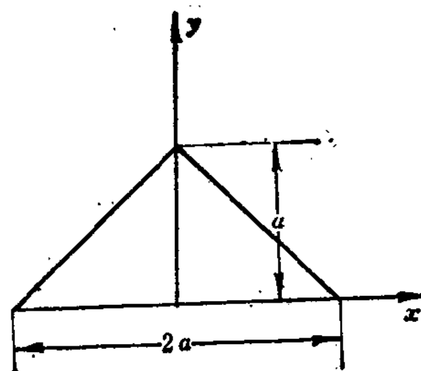
(3) $\Phi = ay^2$;

(4) $\Phi = axy$;

(5) $\Phi = ax^3$。



题 9-9 图



题 9-10 图

9-10 已知应力函数为 $\Phi = A(x^3 + xy^2)$，试求图示三角形平板上的面力。

第十章　能量原理

§10.1　虚功原理

1. 虚功原理

我们在分析力学中已学过质点系的虚功原理，现在要将其推广到可变形的弹性体。对于可变形的弹性体，其内力往往也要作功，**虚功原理**可以叙述为：

如果在虚位移发生以前，变形体处于平衡状态，那么，在虚位移发生时，外力在虚位移上作的虚功 δV 等于变形体内应力在虚应变上所作的虚功 δU，即成立

$$\delta V=\delta U \tag{10.1}$$

这里所说的虚位移是指满足给定几何边界条件的任意的无限小位移；虚应变则是由虚位移所给出的应变，它可以由联系位移和应变的几何方程给出。

仍采用上一章的符号，设弹性体受到的外力有体积力 $\boldsymbol{F}$ 和边界 S_1 上给出的表面力 $\overline{\boldsymbol{F}}$；在边界 S_2 上有位移边界条件 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$。记弹性体内任一点的虚位移为

$$\delta\boldsymbol{u}=[\delta u \quad \delta v \quad \delta w]^T \tag{10.2}$$

由此引起的一阶应变增量，即虚应变为

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}=[\delta\varepsilon_x,\delta\varepsilon_y,\delta\varepsilon_z,\delta\gamma_{yz},\delta\gamma_{zx},\delta\gamma_{xy}]^T \tag{10.3}$$

如果我们选用小位移理论下的几何方程(9.23)或(9.45)，那么虚应变分量为

$$\left\{\begin{aligned}&\delta\varepsilon_x=\frac{\partial}{\partial x}(\delta u),\ \delta\varepsilon_y=\frac{\partial}{\partial y}(\delta v),\ \delta\varepsilon_z=\frac{\partial}{\partial z}(\delta w),\\&\delta\gamma_{yz}=\frac{\partial}{\partial z}(\delta v)+\frac{\partial}{\partial y}(\delta w),\ \delta\gamma_{zx}=\frac{\partial}{\partial z}(\delta u)+\frac{\partial}{\partial x}(\delta w),\\&\delta\gamma_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}(\delta u)+\frac{\partial}{\partial x}(\delta v)\end{aligned}\right. \tag{10.4}$$

对于上述弹性体,小位移理论的虚功原理可以表示为:

$$\begin{cases} \int_\Omega \boldsymbol{F}^T \delta \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\tau + \int_{S_1} \overline{\boldsymbol{F}}^T \delta \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}S = \int_\Omega \sigma^T \delta \varepsilon \, \mathrm{d}\tau \\ \delta \boldsymbol{u}|_{S_2} = 0 \end{cases} \tag{10.5a}$$

其中 Ω 为物体所占有的空间。由于在边界 S_2 上已给出了确定的位移 $\boldsymbol{u}^*$,所以在 S_2 上的虚位移 $\delta\boldsymbol{u}=0$,因此(10.5a)第一式左边第二项的积分域可以扩充到全部边界面 S 上,即

$$\int_\Omega \boldsymbol{F}^T \delta \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\tau + \int_S \overline{F}^T \delta \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}S = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^T \delta \varepsilon \, \mathrm{d}\tau \tag{10.5b}$$

2. 虚功原理与平衡方程的等价性。

用虚功原理研究物体平衡状况时,可以与前一章的平衡方程互相推演。下面我们就从虚功原理(10.5b)出发来导出平衡微分方程(9.6)。

设物体体积微元为 $\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,表面外法线的方向余弦为 (l,m,n);则在边界上成立 $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\pm l\,\mathrm{d}S$, $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=\pm m\,\mathrm{d}S$, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pm n\,\mathrm{d}S$,利用分部积分公式,可以得到以下的格林恒等式:

$$\iiint_\Omega \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u \, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_S \sigma_x l \delta u \, \mathrm{d}s - \iiint_\Omega \sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

注意到虚应变为 $\delta\varepsilon_x=\dfrac{\partial \delta u}{\partial x}$,则上式可以改写为

$$\int_\Omega \sigma_x \delta\varepsilon_x \, \mathrm{d}\tau = \int_S \sigma_x l \delta u \, \mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u \, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{10.6}$$

(10.6)式的左边表示应力分量 σ_x 在其所对应的虚应变上作的功。类似地,可以写出其他应力分量在各自对应的虚应变上所作的功,例如

$$\int_\Omega \sigma_y \mathrm{d}\varepsilon_y \, \mathrm{d}\tau = \int_S \sigma_x m \delta v \, \mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \delta v \, \mathrm{d}\tau$$

等等。

将(10.5b)右端写成分量形式,体力 $\boldsymbol{F}$ 和表面力 $\overline{\boldsymbol{F}}$ 也用分量表示,则(10.5b)可改写为

$$\int_{\Omega}(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}+\tau_{zx}\delta\gamma_{zx}+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy})\mathrm{d}\,\tau$$

$$-\int_{\Omega}(X\delta u+Y\delta v+Z\delta w)\mathrm{d}\,\tau-\int_{S_1}(\overline{X}\delta u+\overline{Y}\delta v+\overline{Z}\delta w)\mathrm{d}\,S=0 \quad (10.7)$$

将上式左边各项用相应的格林恒等式代入，经整理后即得

$$\int_{\Omega}\Big[\Big(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X\Big)\delta u+\Big(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}$$

$$+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y\Big)\delta v+\Big(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\Big)\delta w\Big]\mathrm{d}\,\tau$$

$$-\int_{S_1}[(l\sigma_x+m\tau_{xy}+n\tau_{zx}-\overline{X})\delta u+(l\tau_{xy}+m\sigma_y+n\tau_{yz}-\overline{Y})\delta v+$$

$$(l\tau_{zx}+m\tau_{yz}+n\sigma_z-\overline{Z})\cdot\delta w]\mathrm{d}\,S=0 \quad (10.8)$$

由于 δu、δv、δw 都是区域 Ω 上的任意连续函数，由上式即可得各个圆括号内的式子均等于零，于是式(10.8)就等价于平衡方程和应力边界条件。

3. 虚功原理的适用性

在上述推导过程中，如果虚应变不取成(10.4)式所示的形式，而是采用描述大变形下应变位移关系的几何方程，则据此导出的虚功原理就可适用于大挠度的弹性体变形。此外虚功原理没有用到材料的应力-应变关系，因此广泛适用于线性和非线性材料。

§10.2 应变势能

1. 应变比能

弹性体受到载荷作用时，内部要产生应力和应变。假定外载从零开始逐渐增加，且弹性体在受载过程中始终保持平衡，则在这个加载过程中外力作的功将转化为物体的**应变能**(应变势能)。每单位体积中所具有的应变能称为**应变能密度**或**比能**，用 $\overline{U}$ 表示，整个物体所具有的应变能为

$$U=\int_{\Omega}\overline{U}\,\mathrm{d}\,\tau \tag{10.9}$$

在一维拉伸情形下，应变能密度可以用图 10-1 中的 σ-ε 曲线下方的面积表示，即 $\overline{U}=\int_0^{\varepsilon}\sigma\,\mathrm{d}\,\varepsilon=\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$；同样，纯剪物体的比能可用 $\overline{U}=\frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}$ 表示。

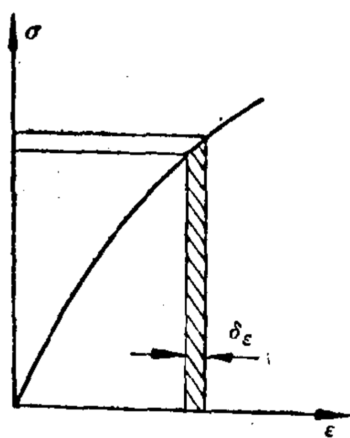


图 10-1

在一般情况下，弹性体有六个应力分量，而且每一个应力分量会引起与其他应力分量相应的应变，这似乎会使应变能的计算复杂化。但是，根据能量守恒定理，应变势能的多少与弹性体受力的次序无关，而完全确定于应力及应变的最终大小。因此我们可以根据应力、应变分量的终值很简单地写出弹性体的比能为

$$\begin{aligned}\overline{U}&=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}+\tau_{xy}\gamma_{xy})\\&=\frac{1}{2}\sigma^T\varepsilon\end{aligned} \tag{10.10}$$

代入(10.9)式即得弹性体应变势能的计算公式：

$$U=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sigma^T\varepsilon\,\mathrm{d}\,\tau \tag{10.11}$$

2. 应变比能的不同表示

应变比能可以用应力来表示，为此只需将应变-应力关系 $\varepsilon=[C]\sigma$ 代入(10.10)式，即得

$$\begin{aligned}\overline{U}&=\frac{1}{2}\sigma^T[C]\sigma\\&=\frac{1}{2E}[(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2)-2\mu(\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x+\sigma_x\sigma_y)\\&\quad+2(1+\mu)(\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2+\tau_{xy}^2)]\end{aligned} \tag{10.12}$$

将上式分别对六个应力分量求导，再利用应力-应变关系式可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{U}}{\partial \sigma_x} = \varepsilon_x, \quad \dfrac{\partial \overline{U}}{\partial \sigma_y} = \varepsilon_y, \quad \dfrac{\partial \overline{U}}{\partial \sigma_z} = \varepsilon_z \\ \dfrac{\partial \overline{U}}{\partial \tau_{yz}} = \gamma_{yz}, \quad \dfrac{\partial \overline{U}}{\partial \tau_{zx}} = \gamma_{zx}, \quad \dfrac{\partial \overline{U}}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy} \end{cases} \tag{10.13}$$

它们表示:弹性体的比能对于任一应力分量的改变率,就等于相应的应变分量。

应变比能也可以用应变分量表示，为此将应力-应变关系 $\boldsymbol{\sigma}=[D]\boldsymbol{\varepsilon}$ 代入(10.10)式得

$$\overline{U} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T[D]\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$= \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{\mu}{1-2\mu}e^2 + (\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2) + \frac{1}{2}(\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2+\gamma_{xy}^2)\right] \tag{10.14}$$

其中 e 是体积应变,$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$。同样可得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{U}}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x, \quad \dfrac{\partial \overline{U}}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y, \quad \dfrac{\partial \overline{U}}{\partial \varepsilon_z} = \sigma_z \\ \dfrac{\partial \overline{U}}{\partial \gamma_{yz}} = \tau_{yz}, \quad \dfrac{\partial \overline{U}}{\partial \gamma_{zx}} = \tau_{zx}, \quad \dfrac{\partial \overline{U}}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy} \end{cases} \tag{10.15}$$

它表示弹性体的比能对任一应变分量的改变率等于相应的应力分量。

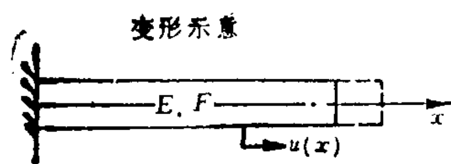
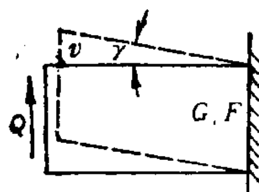
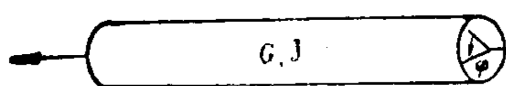
应变比能也可用位移表示，将 $\boldsymbol{\varepsilon}=[B]\boldsymbol{u}$代入(10.14)式即得

$$\overline{U} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T[B]^T[D][B]\boldsymbol{u}$$

$$= \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \tag{10.16}$$

根据上述公式很容易导出杆件在各种简单变形下的应变能计算公式如表 10.1。

表 10.1

变形示意	内力	应变能
 (a)	轴力 N	$\int \frac{N^2(x)}{2EF}dx$ 或 $\int \frac{EF}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$
 (b)	剪力 Q	$\int \frac{Q^2(x)}{2GF}dx$ 或 $\int \frac{GF}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$
 (c)	扭矩 T	$\int \frac{T^2(x)}{2GJ}dx$ 或 $\int \frac{GJ}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx$
 (d)	弯矩 M	$\int \frac{M^2(x)}{2EI}dx$ 或 $\int \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx$

例 10.1 如图 10-2 所示长度为 l 的杆受到轴向荷载 P 的作用，试求它储存的应变能。

【解】 本例为简单拉伸情况，每一截面上的轴力均为 $N=P$，记 $F=\frac{\pi}{4}d^2$，则由，表 10.1(a) 所示的应变能计算公式可得：

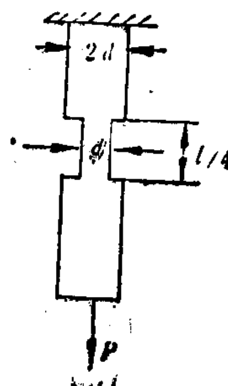


图10-2

$$U=\frac{P^2}{2EA}\frac{l}{4}+\frac{P^2}{8EA}\frac{3l}{4}=\frac{7P^2l}{32EA}=\frac{7P^2l}{8\pi Ed^2}$$

§10.3 最小势能原理及其应用

1. 最小势能原理

我们从虚功原理出发来推导弹性体的最小势能原理。仍采用前两节的符号，虚功原理为

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{F}^T\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\tau+\int_{S_1}\overline{\boldsymbol{F}}^T\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S=\int_{\Omega}\boldsymbol{\sigma}^T\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}\tau \tag{10.5a}$$

显然，上式右端就是应变能的一次变分，记作 δU。由于虚位移是满足位移边界条件的无限小位移，外力的大小和方向都不随虚位移而变化，因此，上式左端的变分号"δ"可提到积分号以外，这样，就有

$$\delta\left[\int_{\Omega}\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\tau+\int_{S_1}\overline{\boldsymbol{F}}^T\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S\right]=\delta U \tag{10.17}$$

记

$$V=\int_{\Omega}\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{u}\mathrm{d}\tau+\int_{S_1}\overline{\boldsymbol{F}}^T\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}s \tag{10.18}$$

$$\Pi=U-V \tag{10.19}$$

并称($-V$)为外力的势能，Π 为**弹性体的总势能**，则(10.17)式可以改写为

$$\delta\Pi=\delta(U-V)=0 \tag{10.20}$$

(10.20)式就是**最小势能原理**(或称最小总势能原理)的数学表示式。它的意义为：在所有满足位移边界条件的协调位移中，那些满足平衡条件的位移使得物体的总势能(应变势能与外力势能之和)取驻定值。

当物体从稳定的平衡状态产生虚位移时，总势能的增量总是正的，因此，在稳定的平衡状态下，物体的总势能取最小值，故称最小势能原理。

虚功原理与最小势能原理可以互推，因此也可以从最小势能原理来导出虚功原理。

2. 最小势能原理的应用

弹性体所满足的平衡方程和边界条件都很复杂，不易直接求解。最小势能原理是一种变分原理，它提供了一个准则，使得在众多的满足位移边界条件的位移中能找出最接近于真实位移的一组解。用这种方法可以求出弹性力学问题的精确解或近似解，而不必去求解弹性力学的基本方程。在 §10.4 中我们将把这种方法用于弹性力学的平面问题，即介绍所谓平面问题的位移变分法。

近期使用很广泛的有限元素法也是以虚功原理或最小势能原理为基础的。

例 10.2 试用虚功原理求图 10-3 所示梁的挠度曲线，并求出中点处的挠度值。

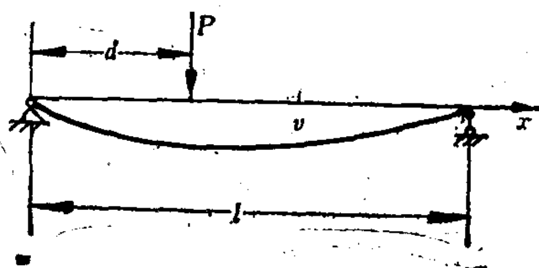


图10-3

【解】 根据梁两端的约束特点，假设挠度曲线为如下形式：

$$v(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中 a_n 是待定的任意常数。这样假设的函数在两端点处满足位移边界条件。由表 10.1d 的计算公式可写出梁的应变能为

$$U=\frac{EI}{2}\int\left(\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{EI\pi^4}{4l^3}\sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2$$

应变能的变分为

$$\delta U=\frac{EI\pi^4}{2l^3}\sum_n n^4 a_n \delta a_n$$

外力 P 在虚位移上的虚功为

$$P\delta v|_{x=d}=P\sum_{n}\sin\frac{n\pi d}{l}\delta a_n$$

由虚功原理可知 $P\delta v|_{x=d}=\delta U$，即

$$P\sum_{n}\sin\frac{n\pi d}{l}\delta a_n=\frac{EI\pi^4}{2l^3}\sum_{n}n^4a_n\delta a_n$$

由于虚位移 δa_n 都是独立的，则由上式可得

$$P\sin\frac{n\pi d}{l}=\frac{EI\pi^4}{2l^3}n^4a_n$$

即得

$$a_n=\frac{2Pl^3}{EIn^4\pi^4}\sin\frac{n\pi d}{l}, \quad (n=1,2,\cdots)$$

挠度曲线为

$$v(x)=\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\sum_{n}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi d}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

中点处的挠度为

$$v(l/2)=\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\sum_{n}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi d}{l}\sin\frac{n\pi}{2}$$

适当选取所得级数的项数，就可以得到相当精确的结果。

§10.4 位移变分法

这一节我们将介绍用位移变分法(李兹法)来求解弹性体的平面问题。

1. 位移变分法

设弹性体在确定的外力作用下处于平衡状态，欲求弹性体内各点的位移。我们记该位移分量为 u 和 v，并且将其写成下列形式：

$$u=u_0+\sum_{m}a_mu_m, \quad v=v_0+\sum_{m}b_mv_m \tag{10.21}$$

其中 a_m 和 b_m 为待定的系数，u_m 和 v_m 是在边界上等于零的设定函数(在弹性体内部不等于零)；u_0 和 v_0 则是满足位移边界条件的设定函

数。这样，不论系数 a_m、b_m 如何选取，按(10.21)式写出的位移分量总能满足位移边界条件。注意，位移的变分体现在系数 a_m 和 b_m 的变更，至于各个设定函数的值，则仅随坐标而变，而与位移的变分无关。

按照(10.21)式，位移分量的变分是

$$\delta u=\sum_m u_m\delta a_m,\quad \delta v=\sum_m v_m\delta b_m \tag{10.22}$$

我们将弹性体的应变势能看作是位移的函数(参见(10.16)式)，而位移又由(10.21)式表示，于是可将应变势能 U 看成是若干个系数 a_m 和 b_m 的多元函数，它的变分为

$$\delta U=\sum_m\left(\frac{\partial U}{\partial a_m}\delta a_m+\frac{\partial U}{\partial b_m}\delta b_m\right) \tag{10.23}$$

如果弹性体受到体积力 X、Y 和表面力 $\overline{X}$、$\overline{Y}$ 的作用，则这些外力在虚位移上所作的功为

$$\begin{aligned}\delta V&=\iint_\Omega(X\,\delta u+Y\delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_S(\overline{X}\delta u+\overline{Y}\delta v)\,\mathrm{d}S\\&=\sum_m\iint_\Omega(Xu_m\delta a_m+Yv_m\delta b_m)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\sum_m\int_S(\overline{X}u_m\delta a_m\\&\quad+\overline{Y}v_m\delta b_m)\,\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{10.24}$$

由虚功原理可知成立 $\delta U=\delta V$。代入(10.23)式和(10.24)式，按 δa_m 和 δb_m 的系数整理归并后可得

$$\sum_m\left[\frac{\partial U}{\partial a_m}-\iint_\Omega Xu_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\int_S\overline{X}u_m\mathrm{d}S\right]\delta a_m$$

$$+\sum_m\left[\frac{\partial U}{\partial b_m}-\iint_\Omega Yv_m\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\int_S\overline{Y}v_m\mathrm{d}S\right]\delta b_m=0$$

因为变分 δa_m 和 δb_m 是相互独立的，可以任意选取，所以在上式中它们的系数都等于零，于是得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial a_m}=\iint_\Omega Xu_m\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_S\overline{X}u_m\,\mathrm{d}S\\[2ex]\dfrac{\partial U}{\partial b_m}=\iint_\Omega Yv_m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_S\overline{Y}v_m\,\mathrm{d}S\end{cases} \tag{10.25}$$

在具体计算中一般取 $\sum_m$ 为有限和式，这样上式就是以 a_m、b_m 为未知数的线代数方程组。将求解代数方程组得到的 a_m 和 b_m 代入(10.21)式，即得到所求的位移分量 u 和 v。就是说，在众多的满足边界条件的位移分量中，我们根据变分原理找到了最适当的一组位移分量。这组位移分量在给定的设定函数的范围内，与精确解最为接近。

2. 位移变分法的应用

我们用下例来说明如何用位移变分法求解平面问题。

例 10.3 如图 10-4，设有宽度为 a、高度为 b 的矩形薄板，其左边及下边受连杆支承，右边及上边分别受均布压强 q_1 和 q_2 的作用，不计体力，试求薄板的位移。

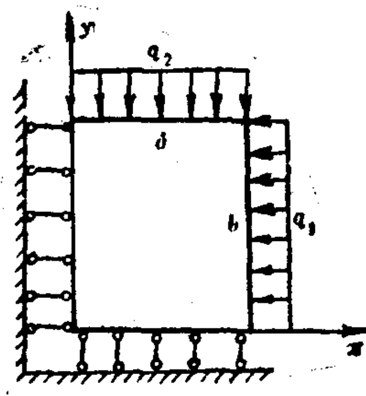


图 10-4

【解】 薄板受图示载荷作用可看作是平面应力问题。取坐标轴如图所示。则边界条件为

$$u|_{x=0}=0,\ v|_{y=0}=0$$

为此，设其满足边界条件的位移分量为

$$\begin{cases}u=x(A_1+A_2x+A_3y+\cdots)\\ v=y(B_1+B_2x+B_3y+\cdots)\end{cases}\tag{10.26 a}$$

其中 A_i 和 B_i 都是待定常数。

作为一次近似，我们在(10.26a)式中仅取一项，即设

$$u=A_1x,\ v=B_1y\tag{10.26 b}$$

板的应变能可由式(10.16)对整个体积积分而得，在平面问题中，比能简化为

$$\overline{U}=\frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$$

(10.27)

若是平面应变问题，可取厚度方向为 1 个单位，于是应变能等于

$$U=\frac{E}{2(1+\mu)}\iint\left[\frac{\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{10.28}$$

本例是平面应力问题，根据 § 9.5 的讨论可知平面应变问题和平面应力问题的求解公式可以相互通用，这时只需要将弹性常数E和 μ作适当的代换。不难证明，为了将平面应变问题的公式转换成平面应力问题公式，只需将原公式中的 μ 改换成 $\mu/(1+\mu)$，E 改换成 $\frac{1+2\mu}{(1+\mu)^2}E$ 即可。在此变换下，$E/(1+\mu)$保持不变。于是对于平面应力问题，只要将(10.28)式积分号内的 μ 改换成 $\mu/(1+\mu)$就可得应变能的计算公式为

$$U=\frac{E}{2(1+\mu)}\iint\left[\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{10.29}$$

将一次近似下的位移分量 $u=A_1x, v=B_1y$ 代入(10.29)式就有

$$U=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\int_0^b\int_0^a[\mu(A_1+B_1)^2+(1-\mu)(A_1^2+B_1^2)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{Eab}{2(1-\mu^2)}(A_1^2+B_1^2+2\mu A_1B_1)$$

将上式代入(10.25)式，根据题意，不计体力，可得

$$\frac{\partial U}{\partial A_1}=\int\overline{X}x\,\mathrm{d}S,\quad \frac{\partial U}{\partial B_1}=\int\overline{Y}y\,\mathrm{d}S$$

再将薄板在边界上的载荷代入后得到关于 A_1 和 B_1 的方程：

$$\begin{cases}\dfrac{Eab}{2(1-\mu^2)}(2A_1+2\mu B_1)=-q_1ab\\[2ex]\dfrac{Eab}{2(1-\mu^2)}(2\mu A_1+2B_1)=-q_2ab\end{cases}$$

求解上述方程，得到 $A_1=(\mu q_2-q_1)/E, B_1=(\mu q_1-q_2)/E$。将此值代回(10.26 b)式，便求得位移的近似解为

$$u=(\mu q_2-q_1)x/E, \quad v=(\mu q_1-q_2)y/E$$

求得位移后，不难通过几何方程和物理方程求得应变和应力。

§ 10.5 互 等 定 理

对于线弹性结构，存在一些互等定理，它们在结构分析中占有重要的地位。由于篇幅所限，我们将简单地予以叙述而不作详细的论证。

1. 功的互等定理（贝谛定理）

图 10-5 为一个适用叠加原理的线弹性体，它分别承受两组力系 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{I}}$ 和 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{II}}$ 的作用由这两组力系各自单独作用所引起的位移分别记为 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{I}}$ 和 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{II}}$。假若先施加 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{I}}$ 后再施加 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{II}}$，则外力所做的功为：

$$u_{\mathrm{I\,II}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{P}_{\mathrm{I}}^T\boldsymbol{u}_{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{P}_{\mathrm{I}}^T\boldsymbol{u}_{\mathrm{II}}+\boldsymbol{P}_{\mathrm{I}}^T\boldsymbol{u}_{\mathrm{II}} \tag{10.30}$$

如果改变施力次序，则外力所做的功为

$$U_{\mathrm{II\,I}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{P}_{\mathrm{I}}^T\boldsymbol{u}_{\mathrm{II}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{P}_{\mathrm{I}}^T\boldsymbol{u}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{P}_{\mathrm{I}}^T\boldsymbol{u}_{\mathrm{II}} \tag{10.31}$$

在两种施力次序下，功都以弹性应变能的形式储存起来，并且，储存能的数量是相同的，因此可得

$$U_{\mathrm{I\,II}}=U_{\mathrm{II\,I}}$$

比较(10.30)和(10.31)两式，即得

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{II}}^T\boldsymbol{u}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{P}_{\mathrm{I}}^T\boldsymbol{u}_{\mathrm{I}} \tag{10.32}$$

式(10.32)称为**贝谛定理**。它可叙述为：力系 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{I}}$ 在位移 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{II}}$ 上所做的功等于力系 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{II}}$ 在位移 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{I}}$ 上所做的功。其中 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{I}}$ 与 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{II}}$ 分别是由 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{I}}$ 和 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{II}}$ 单独作用所引起的位移，而且各位移分量与载荷 $\boldsymbol{P}$ 的分量是相一致的。

功的互等定理中的力和位移都是广义的。例如载荷 $\boldsymbol{P}$ 可以表示力或力偶，则位移就分别为线位移或角位移。

2. 位移互等定理（麦克斯韦定理）

将上述贝谛定理中的两种力系 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{I}}$ 和 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{II}}$ 都取成一个单位力，并按其作用点位置分别记作 P_1 和 P_2。记 $\delta_{ij}(i、j=1,2)$ 为弹性体上由

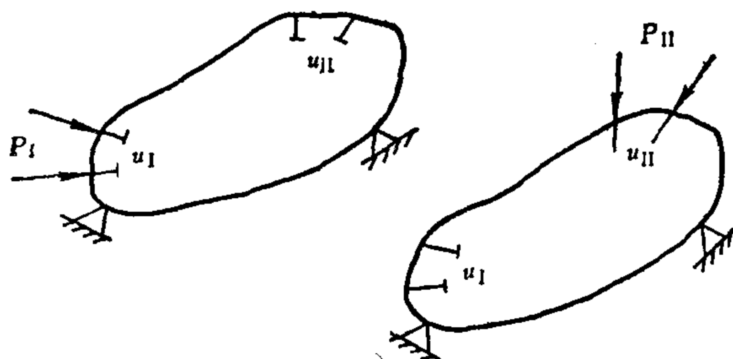


图 10-5

于力 P_j 的作用而在 P_i 的作用点处所产生的位移(沿 P_i 方向)。于是作为(10.32)式的特殊情况可以得到 $P_1 \cdot \delta_{12} = P_2 \cdot \delta_{21}$ 即

$$\delta_{12} = \delta_{21} \tag{10.33}$$

上式就是著名的**位移互等定理**。它可以推广为一般形式,即

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \tag{10.34}$$

(10.34)式中的 δ_{ij} 称为**柔度影响系数**。因此位移互等定理可以一般地叙述为:

作用于 j 点的单位力使 i 点处所产生的位移等于作用于 i 点处的单位力在 j 点处所产生的位移。

位移互等定理表明结构柔度影响系数的互易性。如结构依次受到 n 个单位载荷作用,将全部柔度影响系数排列成矩阵形式就得到**柔度矩阵**:

$$[\delta_{ij}] = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \cdots & \delta_{2n} \\ & \cdots & & & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} & \cdots & \delta_{nn} \end{pmatrix}$$

由位移互等定理可知柔度矩阵必是对称阵。

图 10-6 是几个位移互等定理的例子。它们说明力和位移是广义的。在各种情形下,广义位移的量纲是不同的,但它们和相应的位移之乘积必定是功的量纲。

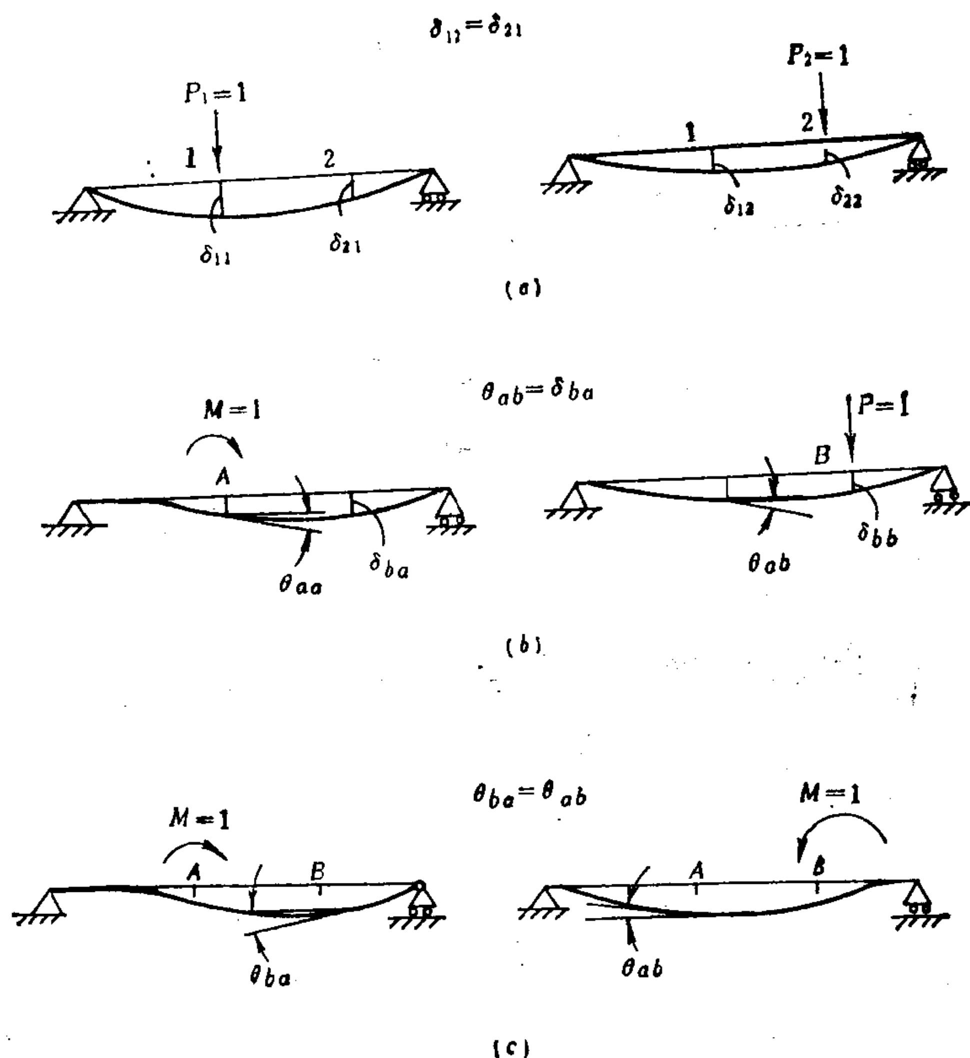
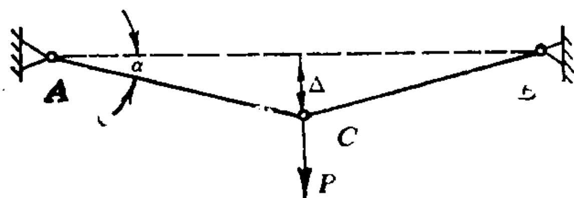


图 10-6

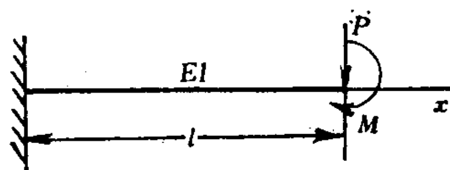
习　　题

10-1　设某结构承受载荷 P 作用，P 与相应的位移 Δ 之间存在非线性关系式 $\Delta=cP^2$，其中 c 为常数。试求当载荷缓慢地从零增加到 P 时，结构中储藏的应变能。

10-2　图示结构由两根长度为 l 的杆 AC 和 BC 组成。A、B 和 C 处均为铰链，杆的材料为线弹性材料，两杆的抗拉刚度均为 EA。在 C 点作用着垂直向下的载荷 P，由 P 引起垂直向下的位移为 Δ。试求 P 与 Δ 的关系式以及结构的应变能。



题 10-2图

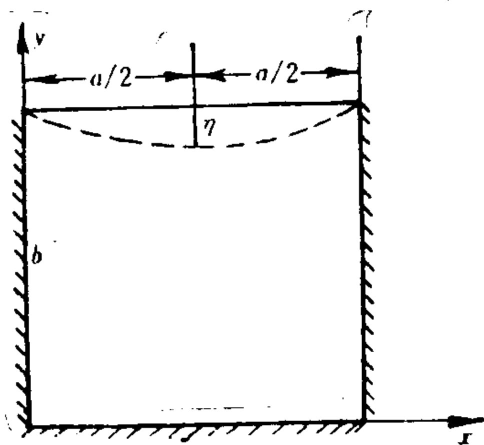


题 10-3图

10-3 已知一长为l、抗弯刚度为EJ的悬臂梁，在自由端承受集中力P和弯矩M的作用。试用最小势能原理求出梁的微分方程及边界条件。

10-4 已知跨度为l、抗弯刚度为EJ的简支梁承受均布载荷q作用，试取挠度$v=a_1\sin\dfrac{\pi x}{l}$，利用能量原理求该梁中点的挠度值。

10-5 设有三边固定的矩形薄板，给定第四边上的位移为：$u=0$，$v=-\eta\sin\dfrac{\pi x}{a}$。不计体力，求板内的应力分量和边界$y=b$上的面力。提示：可以设定位移分量的形式为



题 10-5图

$$u=\sum_m\sum_n A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$v=-\eta\frac{y}{b}\frac{\sin\pi x}{a}+\sum_m\sum_n B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

并取$m=1$，$n=1$。

附　录

I　无限小转动是矢量

设刚体作定点运动，O 为固定点。现刚体绕 OA 轴（单位矢量为 $\boldsymbol{n}$）转过 θ 角度，如图 I-1。刚体上 M 点原来的矢径为 $\boldsymbol{r}$，若转动后 M 点到达 M_1 点，且矢径为 $\boldsymbol{r}_1$，则位移矢量为 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}=\overrightarrow{MM_1}$。

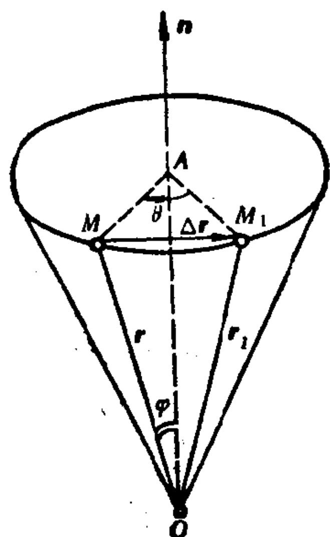


图 I-1

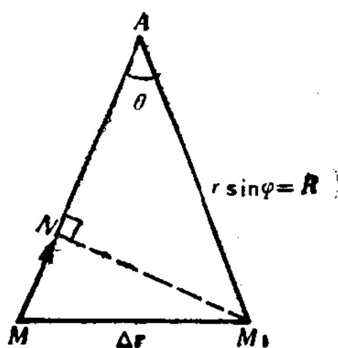


图 I-2

由图 I-2，$MN=R(1-\cos\theta)=2R\sin^2\dfrac{\theta}{2}$；$NM_1=R\sin\theta$，于是

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}=\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM_1}$$

$$=2\sin^2\frac{\theta}{2}[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r})]+\sin\theta(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r})$$

$$=\theta\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\theta^2[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r})]+\cdots \tag{I-1}$$

现考虑连续两次有限转动：先绕 OA_1 轴（单位矢量 $\boldsymbol{n}_1$）转过 θ_1 角，然后绕 OA_2 轴（单位矢量 $\boldsymbol{n}_2$）转过 θ_2 角。其中 $\boldsymbol{n}_1\neq\boldsymbol{n}_2$，而且 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 都不与 $\boldsymbol{r}$ 平行，即

$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{r}\neq0$，$\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{r}\neq0$，则 $r\xrightarrow{\theta_1}r_1\xrightarrow{\theta_2}r_2$，由公式(Ⅰ-1)可算得

$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}+\theta_1\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{r}+\theta_2\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\theta_1^2[\boldsymbol{n}_1\times(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{r})]$$

$$+\frac{1}{2}\theta_2^2[\boldsymbol{n}_2\times(\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{r})]+\theta_1\theta_2[\boldsymbol{n}_2\times(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{r})]+\cdots \tag{Ⅰ-2}$$

如果转动顺序相反，即先绕 OA_2 轴转 θ_2 角，后绕 OA_1 轴转 θ_1 角，设 $\boldsymbol{r}\xrightarrow{\theta_2}\boldsymbol{r}_1'\xrightarrow{\theta_1}\boldsymbol{r}'$，则同样可算得

$$\boldsymbol{r}_2'=\boldsymbol{r}+\theta_2\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{r}+\theta_1\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\theta_2^2[\boldsymbol{n}_2\times(\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{r})]$$

$$+\frac{1}{2}\theta_1^2[\boldsymbol{n}_1\times(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{r})]+\theta_2\theta_1[\boldsymbol{n}_1\times(\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{r})]+\cdots \tag{Ⅰ-3}$$

因为

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{r}\neq0,\quad \boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{r}\neq0,\quad \boldsymbol{n}_1\neq\boldsymbol{n}_2$$

所以

$$\boldsymbol{n}_1\times(\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{r})\neq\boldsymbol{n}_2\times(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{r})$$

也就是 $\boldsymbol{r}_2$ 与 $\boldsymbol{r}_2'$ 代表不同的位置，所以对于有限转动，转动顺序是不可交换的。

但是当两次转动都是无限小，即当 $|\theta_1|\ll1$，$|\theta_2|\ll1$时，则在略去二阶和更高阶无限小量后，(Ⅰ-2)式和(Ⅰ-3)式相等，即

$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}+\theta_1\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{r}+\theta_2\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{r}_2'=\boldsymbol{r}+\theta_2\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{r}+\theta_1\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{r}$$

这就证明了无限小转动是矢量。

Ⅱ 刚体角速度与基点选取无关

试证，当刚体作一般运动时，刚体的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 与基点的选取无关，也与固连系的坐标轴取向无关。

[证] 设取刚体上的 A 点为基点，其刚体角速度为 $\boldsymbol{\omega}_A$，又设当取 B 为基点时，刚体的角速度为 $\boldsymbol{\omega}_B$。

现设 M 为刚体上任一点，则由基点法速度公式，有

$$\boldsymbol{v}_M=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}_A\times\overrightarrow{AM} \tag{Ⅱ-1}$$

$$\boldsymbol{v}_M=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{\omega}_B\times\overrightarrow{BM} \tag{Ⅱ-2}$$

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}_A\times\overrightarrow{AB} \tag{Ⅱ-3}$$

由以上三式，可推得

$$(\boldsymbol{\omega}_A-\boldsymbol{\omega}_B)\times\overrightarrow{BM}=0 \tag{Ⅱ-4}$$

因为 M 点是任意的，$\overrightarrow{BM}$ 是任意矢量，故有

$$\boldsymbol{\omega}_A-\boldsymbol{\omega}_B=0$$

即

$$\boldsymbol{\omega}_A=\boldsymbol{\omega}_B=\boldsymbol{\omega} \tag{Ⅱ-5}$$

所以刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 与基点的选取无关。

又，如在刚体上 A 点任取两个固连系， 则因这两个坐标系各轴间的夹角均为常数，所以不影响角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的大小和方向。证毕

Ⅲ 虚位移原理的证明

虚位移原理：有一具有定常、理想约束的质点系，设原来是静止的，则保持其平衡的充要条件是所有主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 在系统的任何虚位移上的虚功之和等于零，即

$$\delta W=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{Ⅲ-1}$$

［证］先证明原理中条件（Ⅲ-1）的必要性。由于系统保持静止，根据牛顿定律，作用在第 i 个点上的主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 和约束力 $\boldsymbol{R}_i$ 之和等于零：$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i=0$。将该式两边点乘 $\delta\boldsymbol{r}_i$，并对 i 求和得：

$$\sum(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\sum\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

由理想约束条件

$$\sum\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

推得

$$\sum\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

再证明条件的充分性。采用反证法，即假设（Ⅲ-1）式对任何虚位移都成立，但在主动力系作用后，质点系原来静止的状态被破坏了。由假设，至少存在一点 k，其 $\boldsymbol{F}^k+\boldsymbol{R}^k\neq0$，于是有加速度

$$\boldsymbol{a}_k=(\boldsymbol{F}_k+\boldsymbol{R}_k)/m_k$$

因为运动是从静止开始的，所以它的位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k$ 和 $\boldsymbol{a}_k$ 同方向，则有

$$(\boldsymbol{F}_k+\boldsymbol{N}_k)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k>0 \tag{Ⅲ-2}$$

对 $i\neq k$，则有

$$(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i)\cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{r}_i \geqslant 0 \qquad (\text{III-3})$$

因为约束是完整、定常的，$\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}_i$ 是 $\delta\,\boldsymbol{r}_i$ 之一，即至少对某一组 $\delta\,\boldsymbol{r}_i$，有

$$(\boldsymbol{F}_k+\boldsymbol{N}_k)\cdot\delta\,\boldsymbol{r}_k>0,\ (\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i)\cdot\delta\,\boldsymbol{r}_i\geqslant 0,\qquad (i\neq k) \qquad (\text{III-4})$$

将 i 由 1 至 N 求和，并利用理想约束的条件 $\sum\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\,\boldsymbol{r}_i=0$，就可推得

$$\sum\boldsymbol{F}_i\cdot\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}_i\geqslant 0$$

于是与假设矛盾，因而当满足方程（III-1）时，每个质点都必须保持静止。证毕。

IV　变分法简介

变分法的基本概念和微分学的基本概念有许多类似之处，微分学研究的是求函数极值的问题，而变分学研究的则是求泛函极值的问题。

设系统的自由度为 1，它的运动规律是 $q=q(t)$，这称为真实运动。

由时间的变化 $\mathrm{d}\,t$ 而引起的真实运动坐标的改变量叫做微分，即

$$\mathrm{d}q=\dot{q}(t)\mathrm{d}\,t$$

考虑另外一个时间函数 $\tilde{q}(t)$，它与函数 $q(t)$ 的关系为：

$$\tilde{q}(t)=q(t)+\alpha\,\eta(t)$$

其中 α 是任意小常数，$\eta(t)$ 是任意可微函数。$\tilde{q}(t)$ 与 $q(t)$ 是不同的函数，它们分别对应于不同的运动。由于函数本身的形状由 $\tilde{q}(t)$ 变化到 $q(t)$，将其每一时刻的改变量记作 δq，则

$$\delta q=\tilde{q}(t)-q(t)=\alpha\eta(t)$$

每一时刻 t 有一个 δq 值，它表示同一时刻 $\tilde{q}(t)$ 与 $q(t)$ 之差别，所以又叫等时变更或叫变分。$\mathrm{d}q$ 与 δq 的差别，可从图 IV-1 中看出

考虑定积分

$$I=\int_{t_0}^{t_1}F(q,\ \dot{q},t)\mathrm{d}t \qquad (\text{IV-1})$$

其中设 F 是有连续二阶偏导数的多元函数，$q(t)$ 有连续二阶导数。I 称为函数 $q(t)$ 的一个泛函。

对于函数 $q(t)$，考虑如下的函数集合 $\{\tilde{q}(t)\}$

$$\tilde{q}=q+\delta q=q(t)+\alpha\eta(t) \qquad (\text{IV-2})$$

其中 $\eta(t)$ 是定义在 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 上的，有二阶连续导数的任意函数，且满足

$$\eta(t_0)=\eta(t_1)=0$$

这个函数集合称为函数 $q(t)$ 的"邻域"。

以邻域中任意一个函数代入(Ⅳ-1) 式可得一个 I 值。泛函极值(包括极大、极小或驻定值)问题或变分问题的提法是：问在 $q(t)$的邻域中，使得泛函 I 取极值的条件是什么？并找出对应的函数 $q(t)$ 来。

如果 $q(t)$表示一个真实运动，则$\tilde{q}(t)$就是在每一时刻与真实运动有一变分 δq 的"邻近运动"，如果 $\tilde{q}(t)$ 满足约束条件的话，它就是"可能运动"。由于已经假定

$$\eta(t_0)=\eta(t_1)=0$$

所以真实运动与可能运动在起始时刻与终了时刻是相同的(图 Ⅳ-2)。变分问题的任务就是要在可能运动的集合中，找出一个真实运动来。

将(Ⅳ-2)式代入(Ⅳ-1)式，并把 I 看成是参量 α 的函数，则得

$$I(\alpha)=\int_{t_0}^{t_1} F(q+\alpha\eta,\dot{q}+\alpha\dot{\eta},t)\mathrm{d}t$$

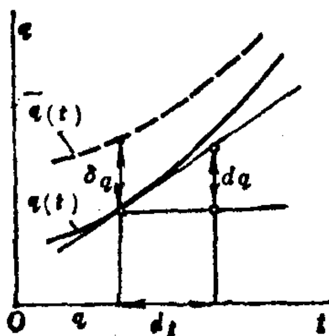


图 Ⅳ-1

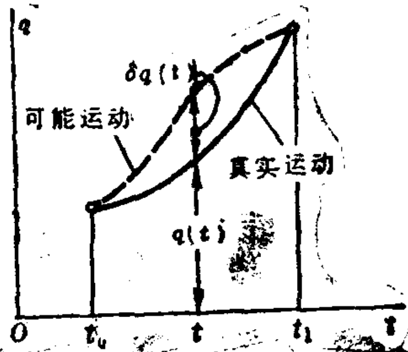


图 Ⅳ-2

在 α 足够小的范围里，或者说对应于 $q(t)$ 的足够小的"邻域"内，使泛函数取极值的必要条件是

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}I(\alpha)\right]_{\alpha=0} =\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\eta+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}\right)\mathrm{d}t=0 \qquad (Ⅳ\text{-}3)$$

记作

$$\delta I=\delta\int_{t_0}^{t_1}F(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t=0$$

因为

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\dot{\eta}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\eta\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\right)\eta\right]\mathrm{d}t$$

$$=\left[\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\eta\right]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\right)\eta\,\mathrm{d}t$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\right)\eta\,\mathrm{d}t$$

将上式代入(Ⅳ-3)式,得

$$\delta I=\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\right)\right]\eta\,\mathrm{d}t=0$$

因为 η 是任意的,且方括号中的函数是 t 的连续函数,所以在区间 $[t_0,t_1]$ 上,上式应恒等于零,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\right)-\frac{\partial F}{\partial q}=0 \qquad (\text{Ⅳ-4})$$

Ⅳ-4上式称为变分法中的欧拉-拉格朗日方程,也就是函数 $q(t)$ 使泛函 I 取极值的必要条件。

反之,可以证明这个条件也是充分的。因为由(Ⅳ-4)式可以直接得出

$$\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha=0$$

在数学上还可以证明对函数 F 及 q 要求的条件可以放宽,只要 F 有一阶分段连续偏导数,q 有一阶连续导数就可以。

如果 F 中不显含 t,则方程(Ⅳ-4)有一个首次积分

$$F-\dot{q}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}=\text{常量} \qquad (\text{Ⅳ-5})$$

这是因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F-\dot{q}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\right)$$

$$=\left[\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\ddot{q}\right]-\left(\ddot{q}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}+\dot{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\right)\right]$$

将(Ⅳ-4)式代入，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F-\dot{q}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)=\frac{\partial F}{\partial t}$$

以上对单自由度情况的讨论不难推广到 n 个自由度的情况。设系统 的运动对应于 n 维位形空间（q 空间）中的一条轨线

$$q_i=q_i(t),\quad (i=1,\cdots\cdots,n)$$

考虑每一个广义坐标有一个变分 δ_{qi}，则可能运动可以表示成

$$\tilde{q}_i=q_i(t)+\delta q_i=q_i(t)+\alpha_i\eta_i(t)\quad (i=1,\cdots\cdots,n)$$

为了表达各广义坐标随时间 t 的变化关系，在 n 维位形空间的基础上再加上变量 t，组成一个 $n+1$ 维空间（q-t 空间）。

在初始时刻 $t=t_0$，系统的位置为 $(q_{10},\cdots,q_{n0})$，将 $(q$-$t)$ 空间中的点 $(t,q_{10},\cdots,q^n{}_0)$ 记作 A，在终止时刻 $(t=t_1)$，系统的位置为 $(q_{11},\cdots,q^n{}_1)$，而 $(t_1,\ q_{11}\cdots,q^n{}_1)$ 对应点 B，则系统的运动过程对应于这 $n+1$ 维空间中 自点 A 至点 B 的一条多维曲线，如图 Ⅳ-3 a 或 b 所示。

根据类似的定理，使泛函

$$I=\int_{t_0}^{t_1}F(q_1,\cdots,q^n,\dot{q}_1\cdots,\dot{q}_n,t)\mathrm{d}t$$

取驻定值的必要条件是

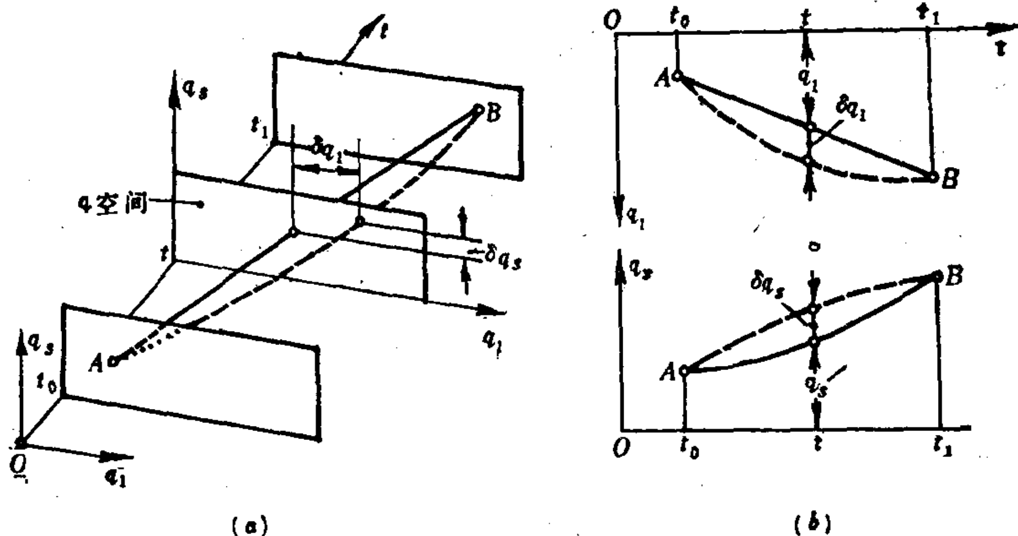


图 Ⅳ-3

$$\delta I=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial F}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\eta_i\mathrm{d}t=0$$

由于 η_i 的任意性，以及方括号中函数的连续性，同样可以得出变分问题的欧拉-拉格朗日方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial F}{\partial q_i}=0,\ (i=1,2,\cdots,n) \tag{Ⅳ-6}$$

参考文献

第一部分 质点和刚体

[1] 胡守信编，理论力学，高等教育出版社，1986。
[2] 朱照宣，"什么是浑沌"，力学与实践 No.4，1985。
[3] Rasband, *Dynamics*, Wiley & Sons, *Inc*., New *York*,1983。
[4] 朱照宣、周起钊、殷金生编，理论力学，北京大学出版社，1982。
[5] 俞文魮陈守吉编，人造卫星轨道的分析和计算，上海教育出版社 1982。
[6] 中山大学编，力学教程，人民教育出版社，1978。
[7] Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag, New York, 1978 (*Translation of* МатеМатический метод по кЛассической механик, В.Й.Арнobбд, наука, москва, 1974)
[8] 甘特马赫，钟奉俄等译，分析力学讲义，人民教育出版社，1963.(译自 *Ф*.Р, Гантмахер, Лекчии по анаЛитической механике, *Физма-тгиз*, 1960)

第二部分 弹 性 体

[9] 冯元桢著，李松年、马和中译，连续介质力学导论，科学出版社，1984。
[10] 刘鸿文编，材料力学，高等教育出版社，1984。
[11] 徐秉业编，弹性和塑性力学例题和习题，机械工业出版社，1981。
[12] 徐芝纶编，弹性力学，人民教育出版社，1979。
[13] 铁摩辛柯、盖尔，胡人礼译，材料力学、科学出版社，1978。
[14] 钱伟长、叶开源著，弹性力学，科学出版社，1956。

部分习题答案

第 一 章

1-1 $v = l\dot{\varphi}\sec^2\varphi$, $a = l\sec^2\varphi(\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}^2 \operatorname{tg}\varphi)$。

1-2 椭圆：$\dfrac{(x-a)^2}{(b+l)^2} + \dfrac{y^2}{l^2} = 1$。

1-3 $v_B = \dfrac{\cos\varphi \pm (b - R\cos\varphi)\sin\varphi}{\sqrt{l^2 - h_A^2 - (b - R\cos\varphi)^2}} v_A$。

1-4 极坐标轨迹方程（A 为积分常数）：

$$r = \frac{A}{v_2\left(1 - \frac{v_1}{v_2}\sin\theta\right)}$$

1-5 (1)坐标法：$x = R(1+\cos 2\omega t)$，$y = R\sin 2\omega t$；$v_x = -2R\omega\sin 2\omega t$，$v_y = 2R\omega\cos 2\omega t$；$a_x = -4R\omega^2\cos 2\omega t$，$a_y = -4R\omega^2\sin 2\omega t$；(2)自然法：$s = 2R\omega t$；$v = 2R\omega$；$a_\tau = 0$，$a_n = 4R\omega^2$。

1-7 $a = [c^2 + (v_0 - ct)^2/R^2]^{1/2}$，当 $t = v_0/c$ 时，$a = c$，此时共走了

$$N = \frac{v_0^2}{4\pi Rc}\text{圈。}$$

1-8 $v = \dfrac{7}{2}\omega R$；$a^n = \dfrac{49}{4}\omega^2 R$，$a_\tau = \dfrac{21\sqrt{3}}{8}\omega^2 R$。

1-10 当 $\theta = 0$ 时，$v_{\max} = 400\ \text{cm/s}$。

1-11 $\Omega(t_0) = 3.14\ /\text{s}$，$\varepsilon(t_0) = 0.026/\text{s}^2$；$a_r(t_0) = -4.93\ \text{cm/s}^2$，$a_\varphi = -0.27\text{cm/s}^2$。

1-12 $\omega = \dfrac{u\sin^2\theta}{R\cos\theta}$，顺时针方向，

1-13 $v_G = \dfrac{R}{R-r}u_0$，$a_G = \dfrac{R}{R-r}a_0$。

1-15 $a_B^\tau = R(2e_0 - \omega_0^2\sqrt{3e_0})$, $a_B^n = 2R\omega_0^2$。

1-16 $\omega_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\omega_1$, $a_2 = \frac{(r_1 + r_2)r_1}{r_2}\omega_1^2$。

1-17 $v_0 = 4\sqrt{3}$ cm/sec, $\omega = 2\sqrt{3}\ \sec^{-1}$（逆时针向）。

1-21 $\omega_\xi = \frac{n\sqrt{3}}{2}\cos knt$, $\omega_\eta = \frac{n\sqrt{3}}{2}\sin knt$, $\omega_\zeta = n\left(\frac{1}{2} + k\right)$;

$\varepsilon_\xi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,kn^2 \sin knt$, $\varepsilon_\xi = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,kn^2\cos knt$, $\varepsilon_\xi = 0$。

1-23 $v_A = 2h\omega_1\cos\alpha$, $a_A = \frac{\omega_1^2 h}{\sin\alpha}\sqrt{1 + \sin^2 2\alpha}$。

1-24 $v_A = v_B = r\omega_1$, $a_A = a_B = r\omega_1\sqrt{\omega_1^2 + 4\omega_2^2}$。

1-26 $\boldsymbol{v} = \left(u + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega R\right)\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\omega R\,\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\omega^2 R(-\boldsymbol{i} + \sqrt{3}\,\boldsymbol{j})$,

其中 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ 均为单位矢量，$\boldsymbol{i}$ 沿 AB 方向，$\boldsymbol{j}$ 与 $\overline{AB}$ 垂直，且向上。

1-27 $v_r = 6.36$ cm/sec, $\angle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 80°58'$。

1-28 在以 O 为极点的平面极坐标系中的轨迹方程：

$$r = r_0\left(\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha}\right)^{k+1}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0}\right)^{k-1}$$

其中 $k = \frac{v_2}{v_1}$, $\alpha = \frac{\varphi}{2}$，而 (α_0, φ_0) 是小船的初始位置。

1-29 在以船的出发处为原点 O 的直角坐标系 Oxy 中（x 轴沿水流方向，y 轴沿初速方向），船的轨迹方程为：

$$\begin{cases} x = \frac{vy^2}{lu}, & \left(y \leqslant \frac{l}{2}\right) \\ x = \frac{2v}{u}y - \frac{vy^2}{lu} - \frac{ul}{2u}, & \left(y \geqslant \frac{l}{2}\right) \end{cases}$$

靠岸地点： $x = \frac{vl}{2u}$, $y = l$。

1-30 令 $OM = x$, 则 (1) $v_a = -\omega\sqrt{4R^2 - x^2}$, $a_a = -\omega^2 x$;
(2) $v_r = 2\omega R$, $a_r = 4\omega^2 R$。

1-31 $a_M=\omega^2[(l-b)\varphi_0^2-b(1+2\varphi_0)]$。

1-32 $v_C=v_0\omega t$, $a_C=\frac{v_0}{R}\sqrt{v_0^2+(\omega Rt)^2}$。

第 二 章

2-4 $X_A=\frac{Pa+Q(l-b)}{2l}$, $Y_A=\frac{P(2l-a)+Q(l-b)}{2l}$;

$X_B=\frac{Q(l+b)-Pa}{2l}$, $Y_B=\frac{Pa-Q(l-b)}{2l}$;

$X_C=-X_A$, $Y_C=Y_B$。

2-6 $L=Wr^2\sin\theta\Big/\sqrt{l^2-4r^2\sin^2\frac{\theta}{2}}$。

2-7 $\sin\varphi=\frac{PR}{(R+l)(W+P)}$。

2-9 $T=Pa$。

2-11 $\mu_{\min}=2-\sqrt{3}$ (在圆柱间)。

2-12 $x=\frac{b}{2\,\mathrm{tg}\,\varepsilon}$。

2-13 $h_{\max}=\frac{2\gamma\mu(1+e^{\mu\pi})}{1+\mu^2}$。

2-14 (1) $L=1.6\,\mathrm{kN\cdot m}$; (2) $\mu_{\min}=8/15$。

2-15 $T=196\,\mathrm{N}$; $X_A=84.87\,\mathrm{N}$, $Y_A=147\,\mathrm{N}$, $Z_A=98\,\mathrm{N}$; $X_B=Z_B=0$。

第 三 章

3-1 $v_1=7.9\,\mathrm{km/s}$, $v_2=11.2\,\mathrm{km/s}$。

3-3 $v_0=(1+\sqrt{3})\sqrt{gl/2}$。

3-4 $t=3.1\,s$, $F=2.3\,N$。

3-5 (a) $P=\frac{1}{2}M\omega l$, $H_0=\frac{1}{3}M\omega l^2$, $T=\frac{1}{6}M\omega^2l^2$。

(b) $P=0$, $H_0=\frac{1}{2}M\omega R^2$, $T=\frac{1}{4}M\omega^2R^2$。

(c) $P=M\omega R$, $H_0=\frac{3}{2}M\omega R^2$, $T=\frac{3}{4}M\omega^2R^2$。

(d) $P=Mv$, $H_0=-\frac{3}{2}MvR$, $T=\frac{3}{4}Mv^2$。

3-6 $T=mv_0^2+m(v^2+\omega^2r^2)$。

3-8 (a)绕质心转动，$\varepsilon=\frac{3F}{MR}$；(b) 平动，$a=\frac{F}{M}$ (c) 平面运动，

$a_G=\frac{F}{M}$，$\varepsilon=\frac{2F}{MR}$。

3-10 $v_A=v_B=\frac{v_1+v_2}{2}$，$u_A=\frac{5v_1+4v_2}{9}$，$u_B=\frac{4v_1+5v_2}{9}$。

3-11 $\theta=\arccos\frac{1}{3}$。

3-12 $\Delta l=\frac{v}{g}\sqrt{2E\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}\right)}$。

3-13 $t=\frac{4m}{3ka^2b\omega_0}$。

第 四 章

4-2 $S=W\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{a}{2l}\csc^3\alpha-1\right)$。

4-3 平衡位置：$\theta=0$ 及 $\varphi=\varphi_0$，而 φ_0 满足

$$l\operatorname{tg}^3\varphi_0-r(1+\operatorname{tg}^2\varphi_0)=0 \text{ 及 } \varphi_0<\frac{\pi}{2}$$

稳定性：(1)$\theta=0$ 是稳定的；(2) 若两杆的公共重心在圆心的下面，则平衡位置也是稳定的。

4-4 当 $kl>2(kr-mg)$ 时，$\theta_1=0$ 是稳定平衡位置。当 $kr>mg$ 时，

$\theta_2 = \arccos \dfrac{kl}{2(kr-mg)}$是稳定的。

4-6 $\begin{cases} m\ddot{x}_A + ma\ddot{\varphi}\cos\varphi - ma\varphi^2\sin\varphi + kx_A = F \\ \dfrac{4}{3}ma^2\ddot{\varphi} + ma\ddot{x}_A\cos\varphi + mga\sin\varphi = 2aF\cos\varphi - L \end{cases}$

4-7 $\dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{2(\cos\alpha - \cos\theta)g}{R\left(1 - \dfrac{m}{m+M}\cos^2\theta\right)}}$。

4-8 $S = \dfrac{mv_0^2}{2l}$。

4-9 $t = \dfrac{v_0 - \omega_0 R}{3fg}$， $v = \dfrac{2v_0 + R\omega_0}{3}$。

4-10 $r = 42164\,\text{km}$， $h = 35786\,\text{km}$。

4-13 $\alpha = \arccos\dfrac{4}{7}$， $\omega = 2\sqrt{\dfrac{g}{7R}}$。

4-14 $(l + R\theta)\ddot{\theta} + R\dot{\theta}^2 + g\sin\theta = 0$

4-15 $y_c^2 = \dfrac{2l^2\omega_0^2}{g}x_c - \dfrac{2l^3\omega_0^2}{g}$（抛物线）； $\Omega(t) = \omega_0$。

4-16 $n=3$，广义坐标为 r、φ、β、其中 r 为地心 O 与哑铃卫星之质心 G 间的距离，φ为 OG 与 OX 轴间的夹角，β 是哑铃卫星轴线与 x轴方向的夹角。

$T = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\beta}^2)$；

$U = -\mu m\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right)$

其中 r_1、r_2 分别为卫星两端质量与地心 O 的距离。

第 五 章

5-1 (a) $A = \dfrac{1}{3}Ma^2$， $B = Ma^2$， $C = \dfrac{4}{3}Ma^2$。

(b) $A = B = C = \dfrac{2}{3}MR^2$。

5-3

$$J_{xyz}(0)=M\begin{pmatrix} \frac{1}{4}z & -\frac{ab}{2\pi} & 0 \\ -\frac{ab}{2\pi} & \frac{1}{4}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+b^2}{4} \end{pmatrix}$$

5-4 $T=\frac{1}{2}A\omega_2^2\cos^2\alpha+\frac{1}{2}C(\omega_1+\omega_2\sin\alpha)^2$

$$\boldsymbol{H}_G=A\omega_2\cos\alpha\boldsymbol{S}^0+C(\omega_1+\omega_2\sin\alpha)\boldsymbol{z}^0$$

5-5 $T=\frac{1}{2}Ml^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{6}Mb^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\cos^2\theta)$

$$\boldsymbol{H}_O=-\frac{1}{3}Mb^2\dot{\theta}\dot{N}+\left(\frac{1}{3}Mb^2+Ml^2\right)\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{S}^0+Ml^2\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{Z}^0$$

5-6 固连主轴系 $Gxyz$，Gz 为圆盘动力对称轴，Gy 轴在圆盘上，且通过盘边的 P 点，则

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

5-7 $\beta=\arccos\left(\frac{3g}{2l\omega^2}\right),\left(\omega^2>\frac{3g}{2l}\right);$

$$R=\frac{l\omega^2W}{2g}\sqrt{1+\frac{7g^2}{4l^2\omega^4}}$$

5-8 $N_A=-N_B=\frac{1}{8(m+n)}M\omega^2R^2\sin2\alpha$。

5-9 运动微分方程：$\ddot{\theta}=\frac{3g}{2l}\sin\theta+\frac{9C^2\cos\theta}{\omega^2l^4\sin^3\theta}$

机械能守恒：$\frac{1}{2}ml^2\left[\frac{l}{3}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+g\cos\theta\right]=E=$常数

关于 $O\zeta$ 轴的动量矩守恒：$\frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta=C=$常数

5-11 $r=\dfrac{a}{2b}[(b+\mu)e^{(b-\mu)\omega t}+(b-\mu)e^{-(b+\mu)\omega t}]$，其中 $b=\sqrt{1+\mu^2}$。

5-13 $\dfrac{4}{3}\ddot{\theta}-\dfrac{2}{3}\omega_0^2\sin 2\theta-\dfrac{g}{l}\sin\theta=0$，$\theta=0$ 是不稳定的相对平衡位置。

5-14 $\ddot{\varphi}-(\omega^2R\cos\varphi-g)R^{-1}\sin\varphi=0$

当 $\omega^2R<g$ 时，$\varphi=\pi$ 是稳定的平衡位置，当 $\omega^2R>g$ 时，$\varphi=\pi$ 是不稳定的平衡位置，而由 $\cos\varphi=-\dfrac{g}{\omega^2R}$ 决定的平衡位置是稳定的，又，$\varphi=0$ 是不稳定的平衡位置。

5-16 当 $kl>mg$ 时，$\theta=0$ 是稳定的平衡位置，而当 $kl<mg$ 时，$\theta=0$ 是不稳定的。

振动微分方程：$ml\ddot{\theta}+(kl-mg)\theta=0$。

5-17 $m_C=m_v+\dfrac{1}{3}m_s+\dfrac{I_0}{b^2}+m_l\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$。

第 六 章

6-1 (1) $H=\dfrac{1}{2m}\left(p_r^2+\dfrac{p_\theta^2}{r^2}+\dfrac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+U(r,\theta,\varphi)$；

(2) $H=\dfrac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)-\omega(xp_y-yp_x)+U(x,y,z)$。

6-2 $H=\dfrac{p}{2ml^2(t)}-mgl\cos\theta-\dfrac{1}{2}m\left[\dfrac{\mathrm{d}\,l(t)}{\mathrm{d}t}\right]^2$。

6-3 $a_G=\dfrac{5}{7}g(5-8\cos\theta+3\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}$。

第 七 章

7-1 $\sigma=-\dfrac{r^2p}{(R^2-r^2)}$。

7-2　$\sigma = \frac{r_i p_i}{h}$。

7-3　$F_{df} = -W, F_{ef} = -\frac{\sqrt{2}}{2}W, F_{eg} = \frac{3W}{2}$。

第　八　章

8-1　$R = \frac{Pb}{a+b}$,　$S = \frac{Pa}{a+b}$。

8-2　$N_1 = \frac{4}{5}P$, $N_2 = \frac{2}{5}P$。

8-3　$\Delta l = 0$。

8-6　$\sigma_{max} = 1.04\ \text{kN/cm}^2$。

8-7 (1) $\theta_A = -\frac{Pa^2}{2EJ}$,　$v_A = \frac{Pa^2}{6EJ}(3l-a)$;

(2)　$\theta_A = \frac{Ma}{EJ}$, $v_A = \frac{Ma}{2EJ}(3a-2l)$。

8-8　$v_C = \frac{1}{24}\frac{Pa^3}{EJ}, v_D = \frac{5Pa^3}{24EJ}$。

第　九　章

9-1　$\sigma = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2, \tau = lm(\sigma_1 - \sigma_2)$。

9-2　$\sigma_1 = (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)^{1/2}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_1$。

9-3　$\sigma_1 = 273a, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -73a$。

9-4　$c = \frac{q}{2}$。

9-6　满足。$e_x = \frac{\mu x}{a}$, $e_y = \frac{\mu x}{a}$, $e_z = -\frac{x}{a}$, $r_{xy} = r_{yz} = r_{zx} = 0$

9-8　$E = 1.5 \times 10^3\ \text{kN/cm}^2$。

第　十　章

10-1　$U = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\Delta^3}{C}}$。

10-2 $P=\frac{EA\Delta^3}{l^3}$, $U=\frac{EA\Delta^4}{4l^3}$.

10-4 $v=\frac{4ql^4}{\pi^5 EJ}$.